JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA AINFORMATIKY ŽU

SEZAM, školský rok 2018/19, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí riešitelia,
veríme, že sa už pasujete s príkladmi z druhej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Reno, Magdaléna, Jacob, Diana a Arcus sa veľmi potešili všetkým vašim riešeniam. Taktiež dúfajú, že im pomôžete aj s ich ďalšími problémami, na ktoré natrafia pri svojich dobrodružstvách v okolí pevnosti Carcassonne. Popri počítaní nových úloh si môžete precvičiť vaše matematické bunky pri čítaní týchto vzorových riešení.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravovala Denisa Múthová*)

Našou úlohou je zistiť koľko rokov má Jacob a koľko rokov majú jeho súrodenci. Na to sa pozrieme, čo všetko už vieme a čo z toho vieme ešte zistiť. Súčin vekov štyroch súrodencov je 882, pričom vieme že každý má rôzny vek a najstarší Jacob nemá viac ako 18 rokov.

Rozložme si súčin 882 na čo najmenšie čísla, pomocou ktorých budeme ďalej skúmať vek detí. 882 dostaneme ako súčin čísel $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$. Z toho vyplýva, že deti môžu mať vek: jeden rok, dva roky, tri roky, šesť rokov ($2 \cdot 3$), sedem rokov, deväť rokov ($3 \cdot 3$), štrnásť rokov ($2 \cdot 7$) alebo osemnásť rokov ($2 \cdot 3 \cdot 3$).

Prvá možnosť by mohla byť, že Jacob má 18 rokov. Potom ostatné deti majú súčin vekov 49 (882 : 18). Číslo 49 dostaneme ako súčin čísel menších ako osemnásť $1 \cdot 7 \cdot 7$. Táto možnosť ale nie je správna, pretože potrebujeme tri rôzne veky pre zvyšné tri deti.

Druhá možnosť by bola, že Jacob má 14 rokov. Potom ostatné deti majú súčin vekov 63 (882 : 14). Číslo 63 dostaneme ako súčin čísel menších ako osemnásť $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. Opäť dve deti nesmú mať rovnaký počet rokov, preto jednu 3 treba vynásobiť buď ďalšou 3 alebo 7. V prípade $3 \cdot 3$ dostaneme, že druhé dieťa má 9 rokov, tretie 7 a štvrté 1 rok. Toto sedí so zadaním a našli sme riešenie. Sú aj ďalšie? Prípad $3 \cdot 7$ nemôže nastať, pretože vek dieťaťa by bol viac ako 18 rokov.

Tretia možnosť by bola, že Jacob má 9 rokov. Potom ostatné deti majú súčin vekov 98 (882 : 9). Číslo 98 dostaneme ako súčin čísel menších ako osemnásť $1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7$. Tu by sedelo, ak by mali deti vek jeden rok, sedem rokov a štrnásť rokov. Potom by ale Jacob nebol najstarší, a keď vymeníme Jacobov vek za 14, dostaneme to isté riešenie ako v predchádzajúcom odseku.

Ďalej ak by mal Jacob 7 rokov, potom ostatné deti by mali dokopy 126 (882 : 7). Číslo 126 dostaneme ako súčin čísel menších ako osemnásť $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$ a z týchto čísel by sme mali vytvoriť tri veky, ktoré sú menšie ako 7 a to sa nedá (zamyslite sa prečo). Preto táto možnosť, ako aj možnosti kde bude mať Jacob sedem alebo menej rokov, nie je možná. Tým pádom sme našu úlohu vyriešili a našli sme práve jedno riešenie.

Odpoveď je, že existuje len jedno riešenie, pri ktorom má Jacob 14 rokov a jeho súrodenci deväť, sedem a jeden rok.

Príklad č. 2 (*opravoval Adam Kňaze****)***

Táto úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi a mnohé z nich ste aj objavili. Najjednoduchšie bolo skúšanie možností (väčšina z vás úlohu tak riešila). Teda, skúšať len tak zaradom všetky možnosti by veľmi nefungovalo, na to ich je príliš veľa. Keď sa ale trochu zamyslíme tak zistíme, že skutočných možností ktoré treba vyskúšať je len 12.

Pozrime sa na najväčšie krabice. Vieme, že Diana má práve 11 veľkých krabíc a každá môže byť buď prázdna, alebo naplnená (ôsmimi strednými krabicami). Je teda 12 možností ako budú tieto krabice naplnené (všetky sú prázdne, alebo jedna je plná, alebo dve sú plné …, alebo dvanásť je plných). Jediné čo nás zaujíma sú počty naplnených krabíc, je nám absolútne jedno konkrétne ktoré z nich sú to, alebo ako sú usporiadané.

Keď ale vieme koľko je plných veľkých krabíc, vieme aj koľko je stredných krabíc dokopy, pretože každá plná veľká krabica obsahuje osem stredných krabíc. Jediné, čo ešte nevieme, je počet malých krabíc. Je však iba jedna možnosť koľko ich môže byť. Poznáme aktuálny počet prázdnych krabíc, kým tam nie sú žiadne malé (v danom momente sú všetky stredné prázdne) a vieme aj koľko prázdnych krabíc mala Diana podľa zadania — 102. Rozdiel medzi týmito počtami bude musieť byť doplnený z malých krabíc.

Tak sa môžeme pustiť do dopĺňania. Vždy keď niektorú strednú krabicu naplníme, odbudne nám tým jedna prázdna krabica (tá stredná) a pribudne osem prázdnych krabíc. Počet prázdnych krabíc sa teda bude zvyšovať po siedmych, a budeme ich pridávať až kým nedostaneme 102. Ak rozdiel ktorý dopĺňame nebude deliteľný siedmimi, alebo ak nebudeme mať dosť stredných krabíc ktoré by sme mohli naplniť, daná možnosť nemohla nastať. Keď vyskúšame všetkých 12 možností, ako mohli byť naplnené veľké krabice, zistíme aké všetky situácie mohli nastať.

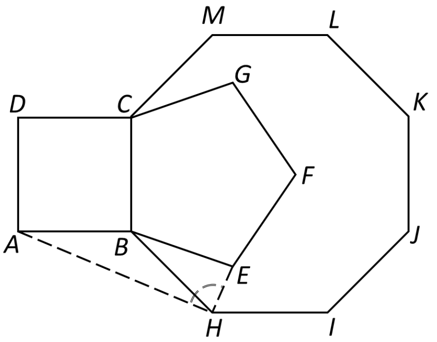
Kľudne si vyskúšajte pohľadať všetky správne možnosti. Keď ich budete mať, ešte zrátajte koľko bolo krabíc dokopy (plných aj prázdnych), pretože to je to čo potrebujeme podľa zadania zistiť. ***To by však už nemal byť problém, a vo všetkých prípadoch zistíte že tento počet je 115.***

<u>Iné riešenie:</u>

Samozrejme, úloha sa dala vyriešiť aj kratšie a elegantnejšie. Na začiatku máme 11 prázdnych krabíc (tie veľké). Potrebujeme ich mať 102. Budeme teda musieť niektoré krabice naplniť. Bez ohľadu na to či napĺňame veľkú krabicu strednými krabicami, alebo strednú malými, vždy nám počet prázdnych krabíc stúpne o sedem (jedna odbudne a osem pribudne), a počet plných krabíc stúpne o jeden. Potrebujeme doplniť 102 – 11 = 91 prázdnych krabíc. 91 : 7=13, teda 13 krát budeme musieť nejakú prázdnu krabicu naplniť ôsmimi menšími. Keď takto teda dostaneme 102 prázdnych krabíc, vznikne nám popri tom 13 plných krabíc, čo znamená, že budeme mať 115 krabíc dokopy. Hotovo.

Príklad č. 3 (*opravovala Ajka Bachratá*)

Niektorí ste príklad riešili narysovaním a odmeraním uhlov. Tento príklad sa tak riešil dosť ťažko, lebo by sme museli presne narysovať pravidelný päťuholník. Niektoré príklady sa dajú riešiť rysovaním, ale ak idú aj spočítať, tak to býva presnejšie. Tak si to skúsme spočítať:



Našou úlohou je zistiť veľkosť uhla AHE. Skúsme na to ísť postupne. Uhol AHE sa skladá z dvoch menších uhlov — AHB a BHE. Takže nám stačí zistiť veľkosť každého z nich a sčítať ich.

Pozrime sa najskôr na uhol BHE. Je to jeden z troch uhlov trojuholníka BHE. Vieme povedať niečo o tomto trojuholníku, čo by nám pomohlo vypočítať jeho uhly? Môžeme si všimnúť, že jeho dve strany BH a BE sú vlastne strany osemuholníka a päťuholníka. Keďže sú obidva útvary pravidelné a majú jednu spoločnú stranu BC, tak budú všetky ich strany rovnako dlhé (navyše sú poskladané z rovnako dlhých šípov). Takže trojuholník BHE je rovnoramenný s ramenami BH a BE. Uhly BHE a BEH, ktoré sú oproti ramenám, sú preto rovnako veľké. V trojuholníku BHE nám ostáva iba uhol HBE o ktorom zatiaľ nič nevieme. Vedeli by sme ho nejako vypočítať? Keď k uhlu HBE pridáme uhol EBC (vnútorný uhol pravidelného päťuholníka), tak dostaneme uhol HBC (vnútorný uhol pravidelného osemuholníka). Tie by sme mali vedieť zistiť.

Je viacero spôsobov ako spočítať vnútorné uhly pravidelných mnohouholníkov. Od nájdenia na wikipédii, cez rôzne zaujímavé spôsoby vypočítania. Niektorí ste ich zistili veľmi pekne. Tí ktorí ste to neskúšali, skúste ešte porozmýšľať. Ako by sa dal vypočítať napríklad vnútorný uhol pravidelného šesťuholníka? Postup tu nebudem prezrádzať, aby ste si ho mohli vymyslieť. Pre pravidelný päťuholník vyjde vnútorný uhol 108° a pre pravidelný osemuholník uhol 135°.

Naspäť k nášmu príkladu. Vieme že ak k uhlu HBE pridáme uhol EBC veľký 108° dostaneme uhol HBC veľký 135°. Takže uhol HBE bude mať veľkosť 135° – 108° = 27°. Ďalej vieme že súčet uhlov v trojuholníku je 180°. Takže $180° = |\angle BHE| + |\angle BEH| + |\angle HBE| = |\angle BHE| + |\angle BEH| + 27°$. Potom $|\angle BHE| + |\angle BEH| = 180° - 27° = 153°$. Nakoniec vieme, že uhly BHE a BEH sú rovnako veľké, takže $|\angle BHE| + |\angle BEH| = |\angle BHE| \cdot 2 = 153°$. Takže veľkosť uhlu BHE je 153° : 2 = 76,5°. Polovicu príkladu máme hotovú.

Už potrebujeme len veľkosť uhlu AHB. Tu budeme postupovať podobne. Pozrieme sa na trojuholník ABH. Opäť je rovnoramenný, lebo jedno jeho rameno je strana štvorca AB a druhé rameno je strana osemuholníka BH. Vďaka tomu sú veľkosti uhlov BAH a BHA rovnaké. Už potrebujeme iba zistiť veľkosť uhla ABH. Pozrieme sa na bod B. Okolo neho by mal byť celý kruh, teda 360°. Ten je zložený z uhlov ABC (90° zo štvorca), CBE (108° z päťuholníka), HBE (27° vypočítaných pred chvíľou) a hľadaného uhlu ABH. Takže veľkosť uhla ABH je 360° – 90° – 108° – 27° = 135°. Keď v trojuholníku ABH máme veľkosť uhla ABH 135°, tak nám na zvyšné dva uhly ostáva 180° – 135° = 45°. Zvyšné dva uhly sú rovnako veľké, takže budú mať veľkosť 45° : 2 = 22,5°. Takže veľkosť uhlu AHB je 22,5°.

No a nakoniec už iba sčítame BHE + AHB = 76,5° + 22,5° = 99° a dostaneme hľadanú veľkosť uhla AHE.

Príklad č. 4 *(opravovala Betka Bohiniková)*

Tento príklad väčšina z Vás zvládla. Postupov bolo viacero, ukážeme si tu jeden, ktorý bol pomerne jednoduchý a veľa z vás ho využilo. Aby sme si vybrali ako bude Magda čítať, aby prečítala 1000 strán čo najrýchlejšie, pozrieme sa na rôzne spôsoby. Najprehľadnejšie bude zapísať si ich do tabuľky. Pre každý spôsob čítania si spočítame aj priemerný počet strán prečítaných za hodinu, s tým, že zarátame do počtu hodín aj spánok. Takto vieme jednotlivé spôsoby čítania medzi sebou porovnať.

číta nonstop	spí	koľko strán prečíta	v priemere počet strán za hodinu
1	1	15	7.5
2	1	29	9.66666667
3	1	42	10.5
4	1	54	10.8
5	1	65	10.8333333
6	1	75	10.7142857
7	1	84	10.5
8	1	92	10.2222222
9	1	99	9.9
10	1	105	9.54545455
11	1	110	9.16666667
12	1	114	8.76923077
13	1	117	8.35714286
14	1	119	7.93333333
15	1	120	7.5

Z tabuľky vidíme, že najrýchlejšie Magda číta, ak číta 5 hodín nonstop a potom hodinu spí. Pri takomto čítaní prečíta 975 strán za 15 cyklov piatich hodín nepretržitého čítania a hodiny spánku. Týchto 975 strán teda prečíta za 90 hodín. Pričom vieme, že počas 90-tej hodiny spala. Počas 91. hodiny vie teda prečítať 15 strán a počas nasledujúcej, 92.hodiny, prečíta zvyšných 10 strán, a teda z 92. hodiny číta už len 42,86 minút. Toto číslo získame ak si prepočítame ako rýchlo počas 92. hodiny číta. Vládze prečítať 14 strán za hodinu, čo znamená, že prečítanie jednej strany jej trvá 60 : 14 = = 4,286 minúty.

Veľa z vás úspešne preskúmalo možné spôsoby čítania, a v nejakej podobe ste získali aj tabuľku a zistili, že najrýchlejšie je čítať 5 hodín a spať jednu hodinu. Avšak niektorý následne zvolili výpočet 1000/10,83 pre zistenie ako dlho prečíta Magda celú knihu. To Vás však priviedlo k výsledku 92,3 hodiny, čo je viac než Magda v skutočnosti potrebuje.

Magda vie Arcusovu knihu prečítať za 91 hodín a 42,86 minút.