JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU
SEZAM, školský rok 2018/19, vzorové riešenia 3. letnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou končí aj celá letná časť SEZAMu. Reno, Magdaléna, Jacob, Diana a Arcus vám z pevnosti Carcassonne všetkým ďakujú za celoročnú pomoc pri riešení ich problémov a prajú pekné a pohodové leto. Tých najšikovnejších z vás navyše čaká letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 9. až 18. augusta na Duchonke. Pred tým, než sa pustíte do vypĺňania návratky, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

***Príklad č. 1** (opravovala Števka Glevitzká)*

Povedzme, že počet cukríkov, ktoré dostala Diana bude D, počet Jacobových cukríkov bude J, Magdiných M a Renových R. Zo zadania vieme, že $D + J + M + R = 125$. Taktiež vieme, že ak by Diana mala o 4 cukríky viac (teda $D + 4$), Jacob o 4 menej (teda $J - 4$), Magda 4-krát viac (teda $4 \cdot M$) a Reno štvrtinu (teda $R/4$), tak by mali všetci rovnako. Označme tento rovnaký počet x, teda

$$x = D + 4 = J - 4 = 4M = \frac{R}{4}\,.$$

Existuje viacero riešení. Tí z vás, ktorí už poznajú rovnice mohli postupovať napríklad tak, že si D, J, M a R vyjadrili pomocou x.

$$D = x - 4$$
$$J = x + 4$$
$$M = \frac{x}{4}$$
$$R = 4x$$

Následne môžeme tieto štyri rovnice dosadiť do súčtu $D + J + M + R = 125$. Potom vieme dopočítať x.

$$(x-4) + (x+4) + \frac{x}{4} + 4x = 125$$
$$6x + \frac{x}{4} = 125$$
$$\frac{25x}{4} = 125 \qquad /\cdot 4$$
$$25x = 500 \qquad /:25$$
$$x = 20$$

Keď poznáme x, tak vieme jednoducho dopočítať $D = x - 4 = 20 - 4 = 16$, $J = x + 4 = 20 + 4 = 24$, $M = x : 4 = 20 : 4 = 5$ a $R = 4 \cdot x = 4 \cdot 20 = 80$.

Ak vám rovnice veľa nehovoria, môžeme sa s tým skúsiť pohrať. Keďže $x = 4 \cdot M$, tak x musí byť násobkom čísla 4. V opačnom prípade by M nebolo celé číslo. Vyskúšajme, čo ak $M = 8$. Potom $x = 4 \cdot M = 4 \cdot 8 = 32$. Keďže $x = 32$, tak vieme postupne dopočítať $D = 28$, $J = 36$ a $R = 128$. No v tomto prípade zistíme, že $D + J + M + R = 200$, čo je priveľa.

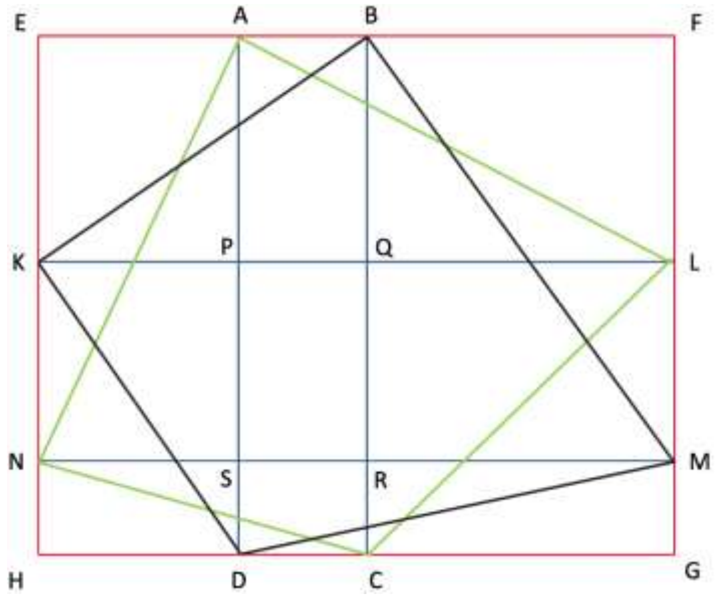
Všimnime si, že ak M zmenšíme, tak sa zmenší aj x. No a ak sa zmenší x, tak sa zmenšia aj hodnoty D, J a R. Naopak, ak M zväčšíme, tak sa zväčšia aj x, D, J a R. Súčet čísiel D, J, M a R zmenšíme teda iba tak, že zmenšíme M.

Skúsme M zmenšiť o 1. Potom $x = 4 \cdot M = 4 \cdot 7 = 28$, a následne $D = 24$, $J = 32$ a $R = 112$. Aj v tomto prípade je súčet $D + J + M + R = 175$ priveľký.

Môžeme si však všimnúť, že ak zmenšíme M o 1, tak D a J sa musia zmenšiť o 4 a R dokonca až o 16 (premyslite si poriadne prečo to tak je). Teda ak zmenšíme M o 1, tak súčet $D + J + M + R$ klesne o $4 + 4 + 1 + 16 = 25$ (podobne ak M o 1 zväčšíme, tak súčet narastie o 25). My sme už zistili, že keď $M = 7$, tak súčet cukríkov je 175. V zadaní je ale tento súčet rovný 125, teda zo 175 sa chceme dostať na 125. Súčet musíme teda zmenšiť o 50, čo je $2 \cdot 25$. Keďže jedným zmenšením M o 1 znížime súčet o 25, tak musíme zmenšiť M o dva. Teda $M = 7 - 2 = 5$, $D = 24 - 2 \cdot 4 = 16$, $J = 32 - 2 \cdot 4 = 24$ a $R = 112 - 2 \cdot 16 = 80$. V tomto prípade naozaj dostaneme $D + J + M + R = 16 + 24 + 5 + 80 = 125$, čo je správny výsledok.

Diana dostala 16, Jacob 24, Magda 5 a Reno 80 cukríkov.

Príklad č. 2 *(opravovala Iva Jančigová)*



Okrem dvoch pôvodných obdĺžnikov ABCD a KLMN a dvoch vytvorených štvoruholníkov ALCN a KBMD si môžeme dokresliť ešte vonkajší obdĺžnik EFGH tak, že predĺžime strany AB, LM, CD a KN. Pozrime sa dvakrát na útvar, ktorý vznikne, keď z obdĺžnika EFGH vystrihneme obdĺžnik PQRS (obdĺžnik PQRS majú štvoruholníky ALCN a KBMD spoločný):

- V prvom prípade sa naň pozrime ako na útvar zložený z obdĺžnikov AFLP, QLGC, RCHN a EASN. Z každého z týchto štyroch obdĺžnikov polovica patrí štvoruholníku ALCN, pretože ich uhlopriečky sú práve hrany štvoruholníka ALCN.
- V druhom prípade sa naň pozrime ako na útvar zložený z obdĺžnikov BFMR, MGDS, PDHK a EBQK. Z každého z týchto štyroch obdĺžnikov patrí polovica štvoruholníku KBMD, pretože ich uhlopriečky sú práve jeho hrany.

Štvoruholníky ALCN a KBMD síce nemusia mať rovnaký tvar, ale oba obsahujú štvoruholník PQRS a polovicu plochy, ktorá ostane, keď z obdĺžnika EFGH vystrihneme obdĺžnik PQRS. A teda majú rovnaký obsah.

Štvoruholníky ALCN a KBMD majú rovnakú plochu.

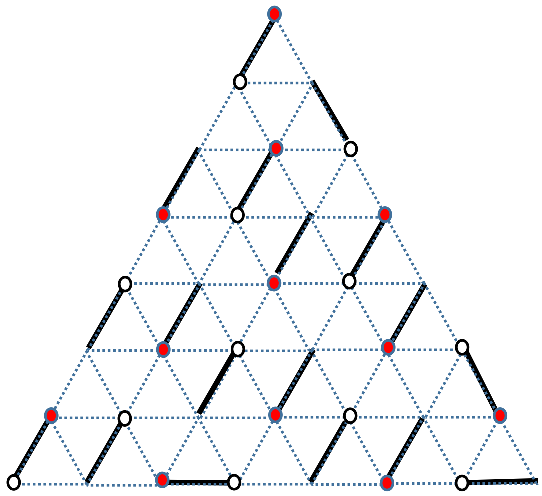
Príklad č. 3 (*opravovala Nina Benková*)

S touto úlohou sa väčšina z vás popasovala veľmi dobre, no viacerí ste si to zbytočne skomplikovali. Bolo dobré si na začiatok uvedomiť, že na riešenie nemá vplyv, ako pozamieňame v skupinkách ostrovy Utorok, Streda, …, Sobota. Takisto nezáleží na tom, kde konkrétne tieto ostrovy na jazere ležia.

Pevnina spolu s ostrovmi predstavuje 8 miest, ktoré sa dajú spájať mostami. Zo zadania vieme, že z pondelka aj z nedele vedú 3 mosty. Keď sa nemá dať medzi týmito ostrovmi prejsť suchou nohou, tak to znamená, že každý z týchto šiestich mostov musí viesť na iné miesto. Tým však vyčerpáme všetkých 8 miest v kráľovstve. Jeden z ostrovov (Pondelok alebo Nedeľa) je spojený s ďalšími troma ostrovmi, a ten druhý s dvoma zvyšnými ostrovmi a pevninou. Takže nám vznikli dve izolované skupinky ostrovov, ktoré nesmieme medzi sebou prepájať, aby sme nespojili Pondelok a Nedeľu. Keď doplníme mosty tak, aby z každého ostrova vychádzali 3, tak musíme v každej štvorici spojiť každé miesto s každým. Pevnina je jedným z týchto miest, vedú z nej preto presne 3 mosty na 3 ostrovy.

Pevninu s niektorým z ostrovov spájajú 3 mosty.

***Príklad č. 4** (opravovala Erika Novotná)*



Keď začneme vyfarbovať vrcholy malých trojuholníkov zistíme, že sa to dá urobiť iba dvomi spôsobmi – buď dáme ľavý bod vo vrstve nižšie od najvyššieho červeného modrou a ten vpravo zelenou, alebo naopak (legenda k obrázku: plné krúžky sú červenej farby, prázdne krúžky modrej, nezakrúžkované vrcholy zelenej). Obidve tieto ofarbenia potom už musíme jednoznačne dofarbiť a na konci sa dá vidieť, že sú iba zrkadlovo preklopené. Teda sa nám stačí hru hrať iba s jedným z nich. Všimnime si, že v priebežnom obrázku nemá žiadny vrchol suseda rovnakej farby.

Po spočítaní vrcholov jednotlivých farieb zistíme, že je tam presne 12 červených, 12 zelených a 12 modrých vrcholov. Každý z týchto vrcholov má byť na nejakej žltej úsečke (hrane), teda aj každý zelený vrchol. Keďže platí, že žiadny z vrcholov nemá suseda rovnakej farby, hociktorá z úsečiek začínajúca v zelenom vrchole musí mať na opačnom konci buď modrý alebo červený vrchol. V zelených vrcholoch musí začínať 12 úsečiek. Tieto úsečky minú teda dokopy 12 ďalších vrcholov inej farby, pričom x z nich bude modrých a zvyšných $12 - x$ musí byť červených. Ostane nám teda $12 - x$ modrých a x červených vrcholov. Tieto vrcholy musíme opäť popárovať do úsečiek. Keďže však nemôžeme urobiť úsečku s dvomi koncami rovnakej farby, musí platiť, že nám ostalo rovnako veľa červených ako modrých vrcholov, čiže $12 - x = x$, teda $x = 6$. Ak sa teda obrázok dá zafarbiť tak, ako tvrdí zadanie, tak v tom prípade musí byť na konci červeno-modrých úsečiek presne 6, červeno-zelených úsečiek tiež 6 a modro-zelených úsečiek tiež 6. Šesť je teda minimálny aj maximálny počet úsečiek s červeno-modrými koncami. Ostáva nám vyskúšať, či to naozaj ide – napríklad tak ako vidíte na obrázku (žlté čiary sú vyznačené plnou čiarou).

Žltých úsečiek s červeno-modrými koncami bude vždy 6.
Hra teda vždy skončí remízou.