JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU

SEZAM, školský rok 2018/19, vzorové riešenia 3. zimnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou sa končí aj zimná časť tohtoročného SEZAMU. Reno, Magdaléna, Jacob, Diana a Arcus sa s vami do jari lúčia. Najšikovnejších z vás čaká zimné sústredenie v Švp Šípková v Terchovej, ktoré sa bude konať v termíne od 28. do 31. marca. Skôr než sa pustíte do vypĺňania návratky, prečítajte si ešte tieto vzorové riešenia.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Baša Marečáková)

Úlohu väčšina z vás uchopila správne a najskôr si pozrela, čo znamená, že dve čísla sú súdeliteľné, a čo znamená, že nie sú. Čísla sú súdeliteľné vtedy, ak ich obe vieme vydeliť bezozvyšku číslom väčším ako 1. Nesúdeliteľné sú vtedy, ak najväčšie číslo, ktorým vieme obe vydeliť bezozvyšku je 1. Napríklad čísla 3 a 7 sú nesúdeliteľné, zatiaľ čo, čísla 3 a 9 sú súdeliteľné (obe sa dajú vydeliť bezozvyšku číslom 3).

Počty rytierov v piatich cípoch hviezdy majú byť navzájom nesúdeliteľné, lebo nie sú spojené chodníčkom. Väčšina z vás si zvolila prvočísla. Keďže prvočíslo je deliteľné len sebou samým a číslom 1, tak bude s iným prvočíslom vždy nesúdeliteľné. Vyhovujú napríklad čísla 5, 7, 11, 13, 17. Avšak kľudne si môžeme zvoliť namiesto 7 aj napríklad číslo 4 (= 2 · 2).

Teraz sa pozrime na to, ako doplniť čísla do piatich vnútorných posedov. Skúsme do každého z nich doplniť súčin čísel v dvoch susedných cípoch. Napríklad do vnútorného posedu susedného s cípmi s číslami 7 a 11 doplníme číslo 7 · 11 = 77. Číslo 77 je naozaj súdeliteľné s číslami 7 aj 11 v susedných cípoch. Zároveň nie je súdeliteľné s číslami vo zvyšných cípoch (5, 13 a 17). Skúste si premyslieť, prečo to platí aj pre všetky ostatné vnútorné posedy.

Nakoniec sa ešte pozrime na (ne)súdeliteľnosť čísel vo vnútorných posedoch. Z obrázka si môžeme všimnúť, že dva vnútorné posedy sú spojené chodníčkom práve vtedy, keď majú spoločného suseda medzi cípmi hviezdy. No v takom prípade sú čísla v oboch vnútorných posedoch deliteľné číslom v tomto susednom cípe, a teda súdeliteľné. Napríklad posedy s číslami 35 a 77 sú oba susedné s cípom s číslom 7, a preto sú obe čísla deliteľné s číslom 7. No a ak dva vnútorné posedy nie sú spojené chodníčkom, tak z podobného dôvodu čísla v nich budú nesúdeliteľné.

Našli sme postup, ako môžeme doplniť čísla do všetkých posedov pričom splníme podmienky zo zadania.

Príklad č. 2 (opravovali Lenka a Miro Hudecovci)

Predpokladajme, že existuje také rozloženie húb medzi hubárov, že Arcus si nevie vybrať troch z nich, čo majú dokopy 50 dubákov. Takže ak si zoradíme hubárov podľa počtu húb a sčítame tých troch, čo majú najviac, tak majú dokopy menej ako 50. To znamená, že zvyšní štyria majú dokopy viac ako 50. Pozrime sa, ako to môžu docieliť. Najviac húb môžu mať, ak ich počty budú za sebou idúce čísla ($5 + 7 + 8 + 9 < 6 + 7 + 8 + 9$). Inými slovami, akékoľvek "vynechané" čísla by nám umožnili vytvoriť rozdelenie, v ktorom by mali ešte viac húb. Preto zoberme maximálne rozdelenie, kde sú počty za sebou idúce čísla.

Ak bude najmenšie z čísel 11, tak dostaneme $11 + 12 + 13 + 14 = 50$ dubákov. To je však málo, potrebujeme aspoň 51. Tým pádom aspoň jeden zo zvyšných štyroch hubárov musel nazbierať aspoň 15 húb. Z toho dôvodu každých z troch hubárov, ktorí nazbierali najviac dubákov, musel nazbierať viac ako 15. Najmenej teda títo traja mohli nazbierať $16 + 17 + 18 = 51$ dubákov, no to je v rozpore s tým, čo sme predpokladali na začiatku.

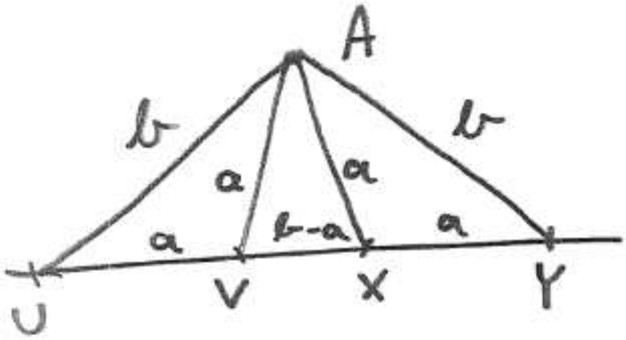
Arcus si teda vždy vie vybrať troch hubárov, ktorí spolu nazbierali aspoň 50 dubákov.

Poznámka opravovateľov:

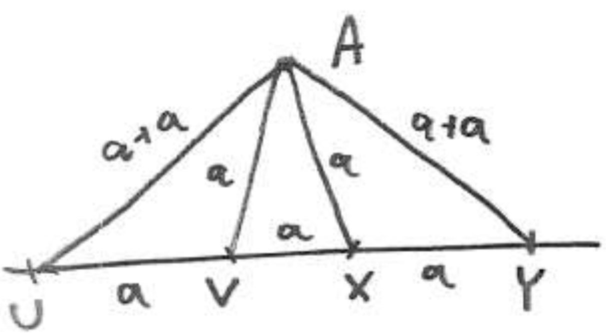
Viacerí riešitelia spravili predpoklad, že stačí preveriť "priemerné" / "rovnomerné" / "postupné" rozloženie hríbov medzi hubárov bez toho, aby zdôvodnili prečo. Pre tých štyroch, čo majú najmenej húb sme to už ukázali, že ak chceme, aby "ukrojili" čo najviac z celkového počtu hríbov, tak musia tvoriť postupnosť. Z podobného dôvodu, tí prví traja budú tvoriť pokračovanie postupnosti (s malou odchýlkou, lebo nemáme takú postupnosť 7 celých čísel, čo by mala súčet 100). Keď chceme, aby mali čo najmenej ako sa dá, tak akékoľvek "vynechané" číslo by nám umožnilo vytvoriť iné rozdelenie, v ktorom by mali menej húb. $17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 = 98$, chýbajúce dva hríby môžeme dať len prvým dvom, aby nám nevznikli dve rovnaké čísla (15, 16, 19 alebo 15, 17, 18) a v oboch prípadoch majú takto súčet 50. Teda sme dospeli k rovnakému výsledku, že vždy bude vhodná trojica pre prípravu elixíru existovať.

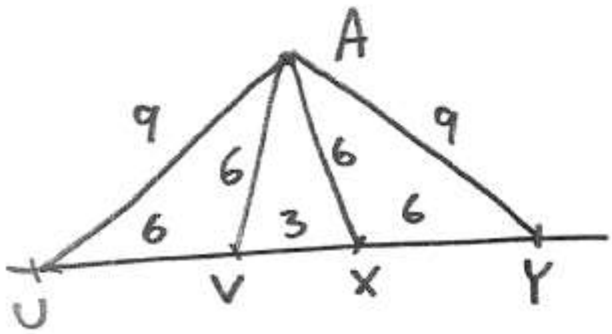
Príklad č. 3 *(opravoval Hynek Bachratý)*

Táto úloha bola ozaj ťažká, a uznanie patrí všetkým, ktorí sa do nej pustili, bez ohľadu na to k akému výsledku sa dopracovali. Správna odpoveď ale bola, že 4 body sa vždy dajú nakresliť tak, aby sme dostali 6 rovnoramenných trojuholníkov. Dá sa to ale len jediným správnym spôsobom, bolo teda treba aj presne vypočítať a napísať, ako to **musí** byť zostrojené.



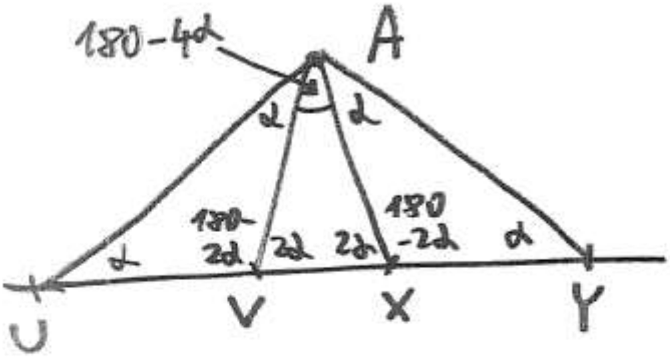
Základom úspechu bolo nájsť symetrické rozloženie bodov a správne určiť rovnaké ramená jednotlivých trojuholníkov. Ako to má byť vidíte vedľa na obrázku. Dôležité je vidieť, že |UV| = |VA| a |UX| = |UA| atď. Niektorí toto rozloženie uvideli alebo uhádli, najlepší riešitelia preskúmali aj všetky ďalšie možnosti rovnoramennosti a ukázali, že toto je jediná možnosť. Tento nápad ale na správne riešenie ešte nestačil. Je možné takto navrhnuté dĺžky strán naozaj použiť, dá sa takýto útvar zostrojiť? Ako to treba spraviť, ako začať? Aby bol význam týchto otázok jasný, pozrite sa na ďalšie dva obrázky.

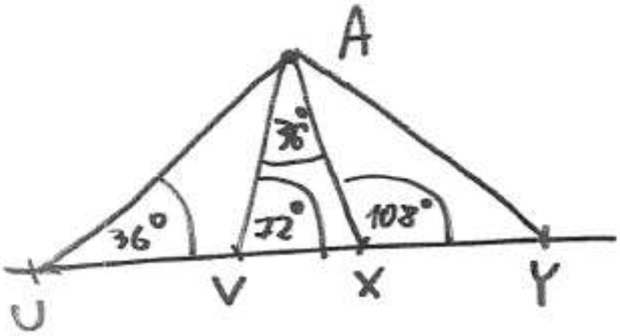




Aj na nich pri prvom pohľade vidíme riešenie úlohy. Keď sa ale pozrieme lepšie, vidíme, že na prvom obrázku v skutočnosti napr. UVA nie je trojuholník! A ten druhý by sa nám síce podarilo narysovať, ale body U,V,X,Y by neležali na priamke! (Alebo ak by ležali, nevyšli by uvedené dĺžky...)

Aby sme si overili, či je náš návrh skutočne správny a realizovateľný, budeme rozmýšľať o uhloch na obrázku. (Niektorí z vás našli aj ďalšie správne, ale ťažšie riešenie pomocou Pytagorovej vety.) Ako α (alfa) sme si označili veľkosť uhla pri vrchole U. Pomocou α sme už označili veľkosti všetkých ďalších uhlov. Využívali sme k tomu zhodnosť uhlov pri rovnakých ramenách, to že súčet veľkostí uhlov v trojuholníku je 180° alebo to, že striedavé uhly majú spolu 180°. Keď sme hotoví





s označovaním, môžeme sa pozrieť napríklad na ΔVYA. Ten má rovnaké ramená AY a VY, preto sa musia rovnať aj uhly pri nich. Teda $180^{\circ} - 3\alpha = 2\alpha$. Z tejto rovnice už ľahko zistíme, že $180^{\circ} = 5\alpha$, a teda $\alpha = 36^{\circ}$. Potom si môžeme dorátať aj ďalšie uhly a je jasné, že s ich pomocou už vieme pre ľubovoľnú priamku a bod A zostrojiť aj U,V,X a Y. (Niektorí riešitelia konštrukciu podrobne popísali. Najlepšie je začať spustením kolmice z A na p, a pokračovať využitím polovice veľkosti uhla UAY a VAX.) Pozor, dá sa to ale len jediným správnym spôsobom, preto bolo dôležité vypočítať, ako takúto konštrukciu spraviť a či sa to naozaj vždy podarí!

Príklad č. 4 *(opravoval Ondro Belan)*

Pokúsime sa nájsť čitateľ a menovateľ Dianinho zlomku. Najskôr sa zamyslime, či čitateľ, alebo menovateľ, môže byť záporné číslo. Ak by bol záporný aj čitateľ, aj menovateľ, tak záporný bude aj ich súčet. No ich súčet je podľa zadania 2019, čo nie je záporné číslo. Ak by bol záporný iba čitateľ, alebo iba menovateľ, tak aj celková hodnota zlomku bude záporná. No zároveň vieme, že Dianin zlomok je najväčší spomedzi všetkých zlomkov spĺňajúcich prvé dve podmienky zo zadania. Ľahko sa presvedčíme, že existuje viacero kladných zlomkov spĺňajúcich prvé dve podmienky (napríklad 1/2018). Takže najväčší spomedzi týchto zlomkov musí byť taktiež kladný. Prišli sme teda zatiaľ na to, že čitateľ aj menovateľ sú kladné prirodzené čísla.

Druhá podmienka zo zadania nám hovorí, že hodnota hľadaného zlomku je menšia ako 1/5. To bude pravda práve vtedy, ak bude menovateľ viac než 5-násobok čitateľa (ak by bol menovateľ presne 5-násobkom čitateľa, tak hodnota zlomku bude prese jedna pätina). Takže súčet čitateľa a menovateľa je väčší než šesť násobok čitateľa. Prvá podmienka nám hovorí, že tento súčet je 2019. Takže 2019 je viac než 6-násobok čitateľa. Z toho dostávame, že 2019 : 6 = 336,5 je viac než čitateľ. Keďže čitateľ je prirodzené číslo, tak môže byť najviac 336. Ak za čitateľa zvolíme toto číslo, tak menovateľ bude 2019 – 336 = 1683 a dostaneme zlomok 336/1683. Je toto najväčší možný zlomok spĺňajúci prvé dve podmienky zo zadania?

Hocijaký iný zlomok spĺňajúci prvé dve podmienky má čitateľa menšieho než 336 (už vieme, že čitateľ je najviac 336, a jediný zlomok, kde je čitateľ presne 336 je 336/1683). No ak zmenšíme čitateľa, tak o rovnaké číslo musíme zväčšiť menovateľa (keďže ich súčet je vždy 2019). Každý zlomok iný než 336/1683 (a spĺňajúci prvé dve podmienky zo zadania) teda dostaneme zmenšením čitateľa a zväčšením menovateľa. No hodnota takého zlomku bude vždy menšia než hodnota pôvodného zlomku (zamyslite sa prečo).

Diana myslela na zlomok 336/1683.