SEZAMKO 2019/2020, Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Milí riešitelia,
veríme, že sa už pasujete s príkladmi z druhej zimnej série tohtoročného SEZAMKA. Ariadna a Tézeus sa veľmi potešil všetkým vašim riešeniam. Taktiež dúfajú, že im pomôžete aj s ďalšími problémami, na ktoré natrafia v paláci Knóssos. Popri počítaní nových úloh si môžete rozhýbať vaše matematické svaly pri čítaní týchto vzorových riešení.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMKovi nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Veľa úspechov v druhej sérii vám želajú organizátori SEZAMKa.

Príklad č. 1 (opravovali *Miloš Mičík* a *Timea Jakubócyová*)

Prvým spôsobom je vypísanie si všetkých možností, ktoré môžu nastať. Dôležité je si najskôr uvedomiť, koľko dní môže mať mesiac. Poznáme mesiace, ktoré majú 28 dní, 29 dní, 30 dní alebo 31 dní. Poďme si postupne rozobrať všetky možnosti:

1. **28-dňový mesiac -** len jeden mesiac má 28 dní a to je február. Ak by trhy začali v prvý deň v mesiaci, dátumy trhov by boli 1, 8, 15, 22, 29. Vidíme, že piaty trh je až 29, ale február má len 28 dní, takže táto možnosť nám nevyhovuje. Môžeme sa na to pozrieť aj tak, že 28 dní sú presne 4 týždne po sedem dní ($4 \cdot 7 = 28$), takže žiadny deň sa tam nemôže vyskytnúť 5-krát.

2. **29-dňový mesiac -** to je február v priestupný rok. Trhy môžu začínať v prvý deň v mesiaci, to sú dni 1, 8, 15, 22, 29. Vidíme, že táto možnosť nám vyhovuje. Keď sčítame dátumy tak dostaneme $1 + 8 + 15 + 22 + 29 = 75$, a 75 je deliteľné 5.
   Ak by trhy začínali druhý deň, dostali by sme dátumy 2, 9, 16, 23, 30 čo nám už nevyhovuje lebo 30 sa v 29-dňovom mesiaci nenachádza. Rovnako si môžete premyslieť, že ak začnú trhy neskôr tiež to nebude vychádzať.

3. **30-dňový mesiac -** trhy môžu začínať v prvé dva dni v mesiaci, to sú dni 1, 8, 15, 22, 29 a 2, 9, 16, 23, 30. Sčítaním všetkých dátumov dostaneme
   $$1 + 8 + 15 + 22 + 29 + 2 + 9 + 16 + 23 + 30 = 155,$$
   no a 155 je deliteľné 5. Neskôr trhy začínať nemôžu, keďže to by znamenalo, že piaty trh by bol neskôr ako 30.

4. **31-dňový mesiac** - Trhy môžu začínať v prvé tri dni v mesiaci a to sú dni 1, 8, 15, 22, 29 a 2, 9, 16, 23, 30 a 3, 10, 17, 24, 31. Keď všetky dátumy sčítame tak dostaneme súčet
   $$1 + 8 + 15 + 22 + 29 + 2 + 9 + 16 + 23 + 30 + 3 + 10 + 17 + 24 + 31 = 240,$$
   čo je opäť číslo deliteľné 5. Neskôr trhy začínať nemôžu, keďže to by znamenalo, že piaty trh by bol neskôr ako 31.

Po rozobratí, všetkých možností vidíme,
že súčet vyhovujúcich dátumov je vždy deliteľný číslom 5.

Poznámka k riešeniu:

Poslali ste nám rôzne riešenia a mnohé z nich boli naozaj veľmi pekné. Pri vypisovaní všetkých možností ste však často na nejakú zabudli alebo ste nám nevysvetlili prečo sú to všetky možnosti, na čo si treba dávať pozor :)

Príklad č. 2 (*opravovala Anežka Pajunková*)

Niektorí z vás skúsili vypísať všetky možnosti ako usporiadať dediny Bania, Chania a Dania medzi mestami Agios a Egios. Potom boli aj takí, čo sa snažili dediny nakresliť v správnej vzdialenosti od Egia.

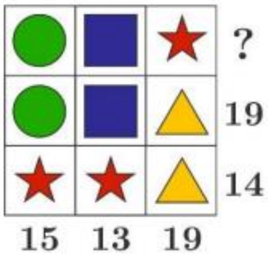
Všetci ste si však všimli, že vzdialenosť medzi Chaniou a Egiom (37 štadiónov) je menšia než vzdialenosť medzi Baniou a Egiom (45 štadiónov). Teda Chania bude bližšie k Egiosu ako Bania. Konkrétne bude bližšie o 45 – 37 = 8 štadiónov. Vieme, že Dania je vzdialená 32 štadiónov od Banie. Môžu nastať dva prípady. Buď je Dania niekde medzi Agiom a Baniou, alebo je niekde medzi Baniou a Egiom. Na každý prípad sa pozrieme osobitne.

Ak je Dania medzi Agiom a Baniou, tak na ceste z Agiosu do Egiosu prejdeme najskôr cez Daniu, potom cez Baniu a nakoniec cez Chaniu. Vzdialenosť z Danie do Chanie teda dostaneme tak, že sčítame vzdialenosť z Danie do Banie a vzdialenosť do Chanie. To je dokopy 32 + 8 = 40 štadiónov. Zo zadania vieme, že táto vzdialenosť je rovnaká ako vzdialenosť medzi Agiom a Baniou. Takže vzdialenosť z Agiosu do Egiosu je 40 štadiónov (prvá časť cesty od Agiosu po Baniu) plus 45 štadiónov (druhá časť cesty od Banie po Egios), čo je spolu 85 štadiónov.

Ak je Dania medzi Baniou a Egiom, tak cestou z Banie do Danie musíme prejsť cez Chaniu. Cesta z Banie do Chanie má 8 štadiónov, takže cesta z Chanie do Danie je o 8 štadiónov kratšia než 32 štadiónov dlhá cesta z Banie do Danie. Takže vzdialenosť z Chanie do Danie je 24 štadiónov (a teda aj vzdialenosť od Agiosu po Baniu je 24 štadiónov). Podobne ako v predošlom prípade už ľahko dopočítame, že vzdialenosť z Agiosu do Egiosu je 24 štadiónov (vzdialenosť od Agiosu po Baniu) plus 45 štadiónov (vzdialenosť od Banie po Egios), čo je spolu 69 štadiónov.

Mestá Agios a Egios sú vzdialené 85 alebo 69 štadiónov.

Príklad č. 3 *(opravovala Ivka Hrivová)*



Našou úlohou je zistiť číslo/súčet na mieste otáznika. Označme si krúžok ako A, štvorček ako B, hviezdičku ako C, trojuholník ako D a zapíšme si postupne súčty v riadkoch aj stĺpcoch:

$$A + B + C = ?$$
$$A + B + D = 19$$
$$C + C + D = 2C + D = 14$$
$$A + A + C = 2A + C = 15$$
$$B + B + C = 2B + C = 13$$
$$C + D + D = 2D + C = 19$$

V tretom riadku aj stĺpci máme iba trojuholníčky a hviezdičky takže sa pozrime na prislúchajúce rovnice. Rovnica tretieho riadku je 2C + D = 14. Rovnica tretieho stĺpca je 2D + C = 19. Odčítajme od oboch strán rovnice tretieho riadku 2C. Dostaneme D = 14 – 2C. Rovnicu tretieho stĺpca preto môžeme prepísať ako 2D + C = 2 · (14 – 2C) + C = 19. V tejto rovnici už je iba jedna neznáma a to je hodnota hviezdičky.

$$2 \cdot (14 - 2C) + C = 19$$
$$28 - 4C + C = 19$$
$$28 - 3C = 19$$
$$28 - 19 = 3C$$
$$9 = 3C$$
$$C = 3$$

Dosadením čísla 3 za písmenko C v rovnici 2D + C = 19 dostaneme:

$$2D + 3 = 19$$
$$2D = 16$$
$$D = 8$$

Vyskúšajte si, že podobným dosadením do rovnice 2A + C = 15 dostaneme A = 6. A z rovnice 2B + C = 13 zistíme, že B = 5.

Teda výsledkom úlohy je hodnota A + B + C = 6 + 5 + 3 = 14.

<u>Iné riešenie:</u>

A rada by som pridala jedno riešenie, ktoré mi dvaja z vás poslali a veľmi ma potešilo. Súčet všetkých prvkov po stĺpcoch je 15 + 13 + 19 = 47. Tento súčet 47 musíme dostať aj v prípade, že všetky prvky zrátame po riadkoch. Takže aj súčet riadkov musí byť 47. Teda **?** *+ 19 + 14 = 47, z čoho už vieme dopočítať* **?** *= 47 – 19 – 14 = 14.*

***Príklad č. 4** (opravovala Iva Jančigová)*

Aby sme našli najväčšie rozporuplné číslo, potrebujeme použiť všetky cifry 0, 1, …, 9. Začneme tou najväčšou, lebo číslo 9_ _ _ _ _ _ _ _ _ bude väčšie, než keby sme začínali ľubovoľnou inou cifrou. Najväčšia cifra, ktorú môžeme dať na druhé miesto, je 6, lebo cifry sa nemôžu opakovať a 8 a 7 nevyhovujú, lebo 9 – 8 < 3 a 9 – 7 < 3. Takže máme 96_ _ _ _ _ _ _ _.

Na tretie miesto nemôžme dať 8, 7, 5, 4, lebo sú k šestke príliš blízko. Zo zvyšných nepoužitých cifier je najväčšia cifra 3, takže dostávame 963 _ _ _ _ _ _ _. Teraz môže prísť 8, lebo 8 – 3 > 2. Máme 9638_ _ _ _ _ _. Nemôže nasledovať 7, lebo rozdiel 8 – 7 je príliš malý, ale 5 vyhovuje: 96385_ _ _ _ _.

Na ďalšie miesto nemôžu prísť 7 a 4 pre malé rozdiely od cifry 5. Zo zvyšných cifier je najväčšia 2 a dostávame 963852_ _ _ _. Teraz môže prísť 7, lebo 7 – 2 > 2. Máme 9638527_ _ _. Ostávajú nám cifry 4, 1, 0. Cifra 4 by mohla prísť za 7, ale potom by nám na konci ostali 1 a 0 vedľa seba, čo nemôže byť. Preto musí nasledovať 1 a máme 96385271_ _. Na posledné dve miesta potom dávame cifry 4 a 0.

Najväčšie rozporuplné číslo je 9 638 527 140.

Poznámka k riešeniu:

Niektorí ste uvažovali iba o štvorciferných číslach. V zadaní bolo síce ako príklad uvedené štvorciferné číslo, ale bolo tam napísané, že použiť sa môžu všetky cifry, každá najviac raz. Treba vždy pozorne prečítať v zadaní, aké sú podmienky a oddeliť, čo je len príklad.

Aj 0 je cifra. Je špeciálna tým, že nebýva na začiatku čísel, ale inak je to cifra ako každá iná a v tomto príklade, keď hľadáme čo najväčšie číslo, sa ju určite oplatí použiť. Už len tým, že ju k nejakému číslu prilepíme na koniec, číslo 10-krát zväčšíme.