SEZAMKO 2019/2020, Vzorové riešenia 2. série zimnej časti

Milí riešitelia,
spolu s druhou sériou sa končí zimná korešpondenčná časť tohtoročného SEZAMKA. Ariadna a Tézeus vám všetkým ďakujú za pomoc pri riešení problémov, na ktoré natrafili. Pred vianočnými prázdninami si môžete precvičiť vaše matematické bunky prečítaním týchto vzorových riešení.

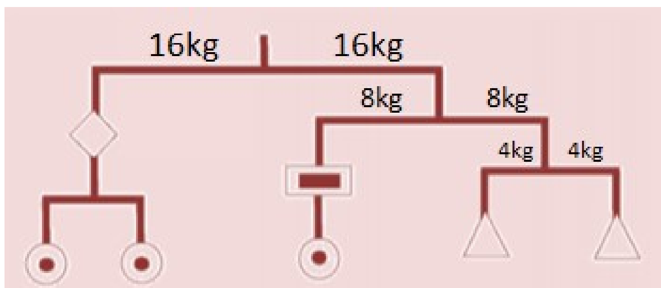
Ale hlavne, ak si nájdete čas, môžete sa stretnúť s našimi hrdinami, svojimi spolusúťažiacimi a tiež opravovateľmi SEZAMKa osobne! Stretnutie bude v sobotu 7.12.2019 v Žiline na Fakulte riadenia a informatiky. Podrobnosti nájdete na priloženej pozvánke v tomto liste.

Nezabudnite, že všetko o SEZAMKovi nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Pekné sviatky a stretnutie v letnej časti súťaže v januári vám želajú organizátori SEZAMKa.

Príklad č. 1 (*opravovala Maťa Kudelčíková****)***

Keďže sú váhy v rovnováhe, aj všetky ich ramená budú v rovnováhach. To znamená, že hlavné dve ramená budú mať 32kg : 2 = 16kg. Ďalej sa pravé rameno rozdvojuje na ďalšie dve, ktoré budú mať po 16kg : 2 = 8kg. Pravé rameno z týchto rozdvojených sa taktiež delí, čiže na každej strane bude mať 8kg : 2 = 4kg. Vidíme, že je to hmotnosť jedného trojuholníka, čiže hmotnosť jedného typu závažia už poznáme.



Ďalej nám pomôže vzorček, ktorý nám hovorí že kosoštvorec – 2 = obdĺžnik + kruh. Z obrázku vidíme, že obdĺžnik a kruh majú mať spolu 8kg, túto hmotnosť dosadíme do rovnice a zistíme hmotnosť kosoštvorca:

kosoštvorec – 2 = 8kg
kosoštvorec = 10kg.

Z ľavého ramena dostávame:

kosoštvorec + 2 · kruh = 16kg
10kg + 2 · kruh = 16kg
2 · kruh = 6kg
kruh = 3kg.

Ostáva nám už len zistiť, koľko kg má obdĺžnik. Vieme, že obdĺžnik + kruh = 8kg. Čiže:

obdĺžnik = 8kg – kruh = 8kg – 3kg = 5kg.

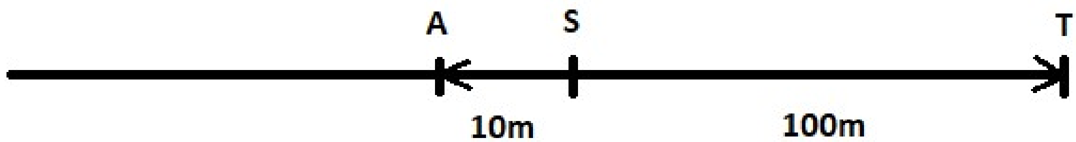
Poznáme už všetky závažia, pričom sme dodržali pravidlá. Hmotnosti sú rôzne, sú medzi 1kg–10kg a všetky ramená váh sú v rovnováhe.

Trojuholník = 4kg
Kosoštvorec = 10kg
Kruh = 3kg
Obdĺžnik = 5kg

Príklad č. 2 (*opravovali Števka a Vierka Glevitzké*)

V zadaní bolo opísané, ako sú naši hrdinovia rýchli. Pozrime sa teda na ich rýchlosti. Kerberos prebehne 100 metrov za 10 sekúnd, takže za jednu sekundu prejde 10 metrov, teda jeho rýchlosť je 10m/s. Tézeus je 5-krát pomalší, takže za ten istý čas prejde 5-krát kratšiu vzdialenosť. Preto za 1 sekundu prejde 2 metre (rýchlosť sú 2m/s). Tézeus je 2-krát rýchlejší ako Ariadna, takže ona beží rýchlosťou 1m/s.

Poďme sa teda pozrieť na celú situáciu. Od miesta, kde sa stretli prešiel Tézeus na Kerberovi 100 metrov za 10 sekúnd. Ariadna zatiaľ za ten čas prešla 10 metrov opačným smerom. Keď Tézeus zosadol z Kerbera, vzdialenosť medzi Tézeom a Ariadnou bola vtedy 110 metrov.



Pozrime sa teraz znovu na rýchlosti. Tézeus prejde každú sekundu 2 metre, zatiaľ čo Ariadna iba 1 meter. Z toho si môžeme všimnúť, že Tézeus každú sekundu skráti Ariadnin náskok o 1 meter. Keďže má teraz náskok 110 metrov, tak Tézeovi bude trvať 110 sekúnd, kým ju dobehne. Dobehne ju teda 220 metrov od miesta, kde zosadol z Kerbera.

Tézeus doženie Ariadnu za 110 sekúnd, 220 metrov od miesta, kde zosadol z Kerbera.

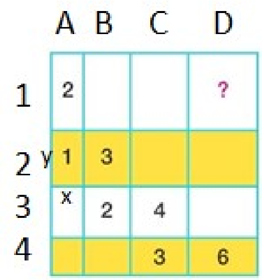
Iné riešenie:

Ak vás myšlienka z druhej časti riešenia (Tézeus každú sekundu skráti Ariadnin náskok o 1 meter) nenapadla, mohli ste skúsiť skúmať, ako to bude vyzerať priebežne. Napríklad po každých 10 sekundách. Dobrý spôsob na to môže byť kresliť si postupne dieliky na priamke (podobnej tej vyššie) alebo vypísať si to do tabuľky. V tabuľke nižšie nájdete vzdialenosť Tézea a Ariadny od miesta, kde zosadol Tézeus z Kerbera. Z nej pekne vidno, kedy a kde sa naši hrdinovia stretnú.

Čas	0s	10s	20s	30s	40s	50s	60s	70s	80s	90s	100s	110s
Ariadna	110m	120m	130m	140m	150m	160m	170m	180m	190m	200m	210m	220m
Tézeus	0m	20m	40m	60m	80m	100m	120m	140m	160m	180m	200m	220m

Príklad č. 3 (opravovala Kaťa Jasenčáková)

Na vyrátanie úlohy si potrebujeme uvedomiť nasledovné. Obsah obdĺžnika so stranami dĺžky *a*, *b* je rovný súčinu čísel *a* a *b*.



Obdĺžniky, ktoré sa dotýkajú jednou stranou, majú túto stranu rovnako dlhú. Preto všetky obdĺžniky v rovnakom riadku majú zvislú stranu rovnako dlhú a všetky obdĺžniky v rovnakom stĺpci majú vodorovnú stranu rovnako dlhú.

Obdĺžniky označíme písmenom a číslom podľa toho, v ktorom stĺpci a riadku sa nachádzajú. Obsah obdĺžnika **D1** je súčin dĺžok jeho zvislej a vodorovnej strany. Tie určíme porovnaním obsahov obdĺžnikov, ktoré poznáme.

Obdĺžnik **A2** má obsah 1, čo je najmenší spomedzi známych obsahov a zároveň 1 delí všetky ostatné obsahy. Preto začneme od tohto obdĺžnika. Označme si dĺžky strán obdĺžnika **A2** písmenami *x* a *y* (tak, ako na obrázku). Keďže obsah obdĺžnika **A2** je 1, tak platí $1 = x \cdot y$.

Obdĺžnik **A1** s obsahom 2 má s obdĺžnikom **A1** vodorovnú stranu dĺžky *x* spoločnú. Keďže jeho obsah je oproti obdĺžniku **A2** dvakrát väčší, musí byť jeho zvislá strana dvakrát dlhšia ako je zvislá strana obdĺžnika **A1**. Zvislá strana obdĺžnika **A2** má dĺžku *y*, takže zvislá strana obdĺžnika **A1** musí mať dĺžku $2y$. Keďže obdĺžnik **A1** je v rovnakom riadku ako obdĺžnik **D1**, tak zvislá strana obdĺžnika **D1** má taktiež dĺžku $2y$.

Teraz zistíme dĺžku vodorovnej strany obdĺžnika **D1**. Najprv sa pozrime na obdĺžnik **B2**. Ten má s obdĺžnikom **A2** spoločnú stranu dĺžky *y*, no jeho obsah je trikrát väčší ako obsah obdĺžnika **A2**. Preto vodorovná strana obdĺžnika **B2** musí byť trikrát tak dlhá ako vodorovná strana obdĺžnika **A2**. Takže vodorovná strana obdĺžnika **B2** má dĺžku $3x$.

Teraz sa pozrime na obdĺžnik **B3** s obsahom 2 a obdĺžnik **C3** s obsahom 4. Zvislé strany majú rovnako dlhé, teda líšiť sa musia len v dĺžkach vodorovných strán. Keďže obdĺžnik **C3** má dvakrát väčší obsah ako obdĺžnik **B3**, musí byť aj jeho vodorovná strana dvakrát dlhšia. Obdĺžnik **B3** má vodorovnú stranu rovnako dlhú ako obdĺžnik **B2**, takže jej dĺžka je $3x$. Obdĺžnik **C3** má teda vodorovnú stranu dĺžky $6x$.

Rovnako porovnáme obdĺžniky **C4** a **D4** vo štvrtom riadku. Použijeme rovnaký postup. Zvislé strany majú rovnako dlhé, teda líšiť sa musia len v dĺžkach vodorovných strán. Keďže obdĺžnik **D4** má dvakrát väčší obsah ako obdĺžnik **C4**, musí byť aj jeho vodorovná strana dvakrát dlhšia. Obdĺžnik **C4** má vodorovnú stranu rovnako dlhú ako obdĺžnik **C3**, takže jej dĺžka je $6x$. Obdĺžnik **D4** má teda vodorovnú stranu dĺžky $12x$.

Zistili sme, že obdĺžnik **D1** má strany dlhé $12x$ a $2y$. Jeho obsah je preto $12x \cdot 2y = 24xy$. No a keďže platí, že $xy = x \cdot y = 1$, tak obsah obdĺžnika **D1** musí byť 24.

Obsah obdĺžnička označeného otáznikom je 24.

Poznámka k riešeniu:

Častou chybou bolo, že ste predpokladali, že rozmery obdĺžnika A2 musia byť 1 a 1. Výsledok vám síce vyšiel správny, no jeho správnosť treba vysvetliť pre hocijaké možné rozmery obdĺžnika A2. Rozmery nemusia byť celé čísla, ale napríklad 0,5 a 2. Aj obrázok je úmyselne nakreslený tak, že strany obdĺžnika A2 majú rôzne dĺžky.

***Príklad č. 4** (opravovala Nina Benková)*

Väčšina z vás si správne uvedomila, že potrebujeme nájsť aspoň tri také počty kamienkov, ktoré nebudú deliteľné dvoma, troma, štyrmi ani piatimi. A to sa dalo viacerými spôsobmi.

Môžeme si vypísať čísla, napr. od 1 do 20, a postupne vyškrtávať nevyhovujúce, až nám nakoniec ostane správne riešenie. Ale aj tento postup bolo treba dôkladne opísať. Aby sa nedali kamienky rozdeliť na kôpky po dvoch, tak musíme vyškrtnúť všetky násobky dvojky – teda párne čísla. Čím sme zároveň docielili, že sa kamienky nedajú rozdeliť už ani po štyroch. Ak sa nemajú dať rozdeliť po piatich, tak nesmieme mať počet kamienkov násobok piatich – násobky piatich sú čísla končiace na 0 alebo 5. Nakoniec ešte vyškrtáme násobky troch. Ak ste si to skúšali vyškrtávať, zistili ste, že vám ostali čísla 1, 7, 11, 13, 17 a 19.

Čiže Minotaurovi môžeme dať napr. 1, 7, 11, 13, 17 alebo 19 kamienkov.

<u>Iné riešenie:</u>

Viacerí ste úlohu riešili pomocou prvočísiel. Prvočíslo je také číslo, ktoré je deliteľné len jednotkou a samým sebou, teda má dva rôzne delitele. Napr. číslo 7 prvočíslo je (je deliteľné iba 1 a 7), číslo 14 nie (je deliteľné 1, 2, 7 a 14). Potom vám stačilo nájsť ľubovoľné prvočísla väčšie než 5 a mali ste zaručené, že také počty kamienkov Minotaurus rozdeliť nevie. No rovnako, ako vyššie, aj tu bolo treba vysvetliť, čím nesmú byť počty kamienkov deliteľné a prečo to tie prvočísla zachránia :)

<u>Poznámka k riešeniu:</u>

Ďakujeme pozorným čitateľom, čo nás upozornili na nepresnosť v zadaní. Zo zadania sa nedalo jednoznačne vyčítať, či mohol mať Minotaurus aj len 1 kameň a či mohol kamene ,,rozdeliť" aj len na 1 kôpku. Považovali sme za správne obe varianty.