SEZAM, školský rok 2019/20, vzorové riešenia 3. zimnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou sa končí aj zimná časť tohtoročného SEZAMU. Lucy, Anke, Gallo a Pierre sa s vami do jari lúčia. Najúspešnejších z vás čaká zimné sústredenie v Švp Šípková v Terchovej, ktoré sa bude konať v termíne od 26. do 29. marca. Skôr než sa pustíte do vypĺňania návratky, prečítajte si ešte tieto vzorové riešenia.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Baša Marečáková)

Zo zadania vieme, že máme 4 lovcov (Pierre, Gallo, Lucy a Anke) a 4 sobov (Rudolf, Kométa, Tanečnica a Skokan). Potrebujeme zistiť, kto jazdil na akom sobovi a ako sa umiestnil.
Pozrime sa postupne na tvrdenia zo zadania, a čo vieme povedať o umiestnení soba alebo lovca.

1. Jazdec na Kométe tvrdil, že keby sa Kométa nepotkla, tak by sa umiestnil aspoň o dve miesta lepšie.
2. Gallo dorazil do cieľa pred jazdcom na Rudolfovi, ale až za Lucy.
3. Hneď, ako dorazili do cieľa, všetci zagratulovali víťazke.
4. Jazdec na Rudolfovi neskončil posledný.

Z tvrdenia 1. vieme povedať, že Kométa skončila tretia alebo štvrtá. Z tvrdenia 2. vieme povedať, že sa pred Rudolfom umiestnili aj Lucy aj Gallo, nemuseli však prísť priamo po sebe. Tvrdenie 3. nám hovorí, že prvá sa musela umiestniť Lucy alebo Anke.
Ak skombinujeme tvrdenie 4. a tvrdenie 2., tak nám vychádza, že Rudolf musel byť tretí, Gallo druhý, Lucy prvá. To je v súlade s tvrdením 3. Pridáme informáciu z tvrdenia 1. a vieme, že Kométa skončila štvrtá. Aktuálne teda máme nasledovný stav:

Poradie	1.	2.	3.	4.
Lovec	Lucy	Gallo		
Sob			Rudolf	Kométa

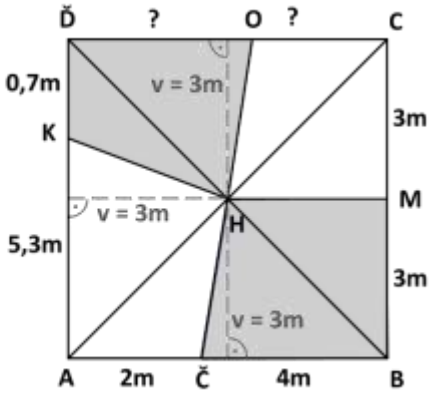
Pozrime sa na ďalšie tvrdenia:
5. Pierre prišiel do cieľa tesne za jazdcom na Tanečnici.
6. Anke napriek očakávaniu neskončila tretia.

Tanečnica mohla prísť do cieľa len ako prvá alebo druhá. Vieme však, že Pierre prišiel hneď po nej, a keďže je už druhé miesto obsadené, tak Tanečnica skončila na druhom a Pierre na treťom.
Zostáva nám posledné tvrdenie, kde vieme, že Anke neskončila tretia, čo je v súlade s tým, že máme voľné už len štvrté miesto. Nič sme doteraz nepovedali o Skokanovi. Pre neho zostáva v tabuľke prvé miesto.
Jazdci a soby dorazili nasledovne:

Poradie	1.	2.	3.	4.
Lovec	Lucy	Gallo	Pierre	Anke
Sob	Skokan	Tanečnica	Rudolf	Kométa

***Príklad č. 2** (opravovala Kika Kovalčíková)*

Väčšina z vás riešila tento príklad tak, že ste si jednotlivé oblasti narezali na trojuholníky a obdĺžniky a počítali ste ich obsahy. Na tento príklad sa ale dalo pozrieť aj inak, riešenie od Ivy Varsányiovej bolo veľmi originálne a chcela by som vám ho ukázať.



Začnime tým, že si do štvorca ABCĎ nakreslíme jeho uhlopriečky. Vznikne nám tak osem trojuholníkov. Ak má byť obsah sivej a bielej časti rovnaký, musí pre obsahy týchto trojuholníkov platiť nasledujúca rovnica:

$$S_{\Delta ČBH} + S_{\Delta BMH} + S_{\Delta HOĎ} + S_{\Delta HĎK} = S_{\Delta HMC} + S_{\Delta COH} + S_{\Delta KAH} + S_{\Delta AČH}$$

Obsah každého z týchto trojuholníkov sa dá vypočítať pomocou dĺžky jednej strany a výšky na túto stranu. Ak pre každý trojuholník zoberieme tú jeho stranu, ktorá leží na obvode štvoruholníka ABCĎ, potom výška bude pre každý trojuholník rovnaká – bude to vzdialenosť tejto strany od stredu štvorca, a to je 3m. Vyjadrime teda obsahy trojuholníkov a dosaďme do predošlej rovnice:

$$\frac{|ČB|\cdot 3}{2} + \frac{|BM|\cdot 3}{2} + \frac{|OĎ|\cdot 3}{2} + \frac{|ĎK|\cdot 3}{2} = \frac{|MC|\cdot 3}{2} + \frac{|CO|\cdot 3}{2} + \frac{|KA|\cdot 3}{2} + \frac{|AČ|\cdot 3}{2} \qquad /\cdot \frac{2}{3}$$

$$|ČB| + |BM| + |OĎ| + |ĎK| = |MC| + |CO| + |KA| + |AČ|$$

Posledná rovnica znamená, že súčet tých strán trojuholníkov, ktoré ležia na obvode štvorca ABCĎ, musia byť pre bielu a pre sivú časť rovnaké. Ak si za ne dosadíme čísla a rovnicu upravíme, dostaneme |OĎ| = 2,6 + |CO|. Okrem toho vieme, že |OĎ| + |CO| = 6m, a z týchto dvoch rovníc už si môžeme vyjadriť, že |CO| = 1,7m.

Príklad č. 3 (*opravovali Lenka a Miro Hudecovci*)

Keď začneme hrať hru podľa pravidiel zo zadania a chvíľku vydržíme (a nepomýlime sa), všimneme si, že nám ako výsledok ostávajú na stene samé nepárne čísla. Vtedy nastáva čas zamyslieť sa, prečo je to tak.

Pozrime sa, aké možnosti môžu nastať, keď od seba odčítame 2 rôzne čísla vzhľadom na počet párnych (P) a nepárnych (N) čísel na stene jaskyne.

a) P – P – rozdiel dvoch párnych čísel je vždy párny. Tým pádom sa takýmto ťahom zníži počet párnych čísel na stene jaskyne o 1 (dve som odčítala, jedno vzniklo).

b) P – N, N – P – takéto rozdiely majú vždy nepárny výsledok. Tým pádom po takomto ťahu sa opäť zníži počet párnych čísel o 1 a počet nepárnych ostane zachovaný.

c) N – N – výsledok tohto rozdielu je vždy párne číslo. Po takomto ťahu sa teda zníži počet nepárnych čísel na stene o 2 a zvýši počet párnych čísel o 1.

Ešte raz v prehľadnej tabuľke:

P - P	P – N, N- P	N - N
P: -1x	P: -1x	P: +1x, N: -2x

Keď sa pozrieme na čísla od 1 do 30, máme tam presne 15 párnych a 15 nepárnych čísel. Nech sa budeme snažiť akokoľvek, nikdy sa nám nepodarí zbaviť nepárneho počtu nepárnych čísel (keďže sa vieme zbaviť vždy len dvoch naraz) a výsledok na konci hry bude vďaka tomu vždy nepárny. Číslo 2 teda na stene jaskyne po konci hry nikdy neostane.

Pre kompletnosť riešenia ešte potrebujeme ukázať, že vieme vytvoriť každé nepárne číslo od 1 do 30. To sa dá spraviť tak, že ukážeme algoritmus (návod), ako to spraviť. Možností je viacero, jedna z nich je napríklad táto:

Pre jednoduchosť riešenia budeme predpokladať, že čísla sú na začiatku hry na stene zoradené podľa veľkosti. Vyberieme si číslo o 1 väčšie, ako číslo, ktoré chceme na konci získať. Toto číslo odložíme „nabok". Teraz si zvyšné čísla dáme do dvojíc vedľa seba stojacich čísel, pričom začneme od 30tky (resp. 28, ak chceme získať na konci 29) a čísla v dvojičke od seba odčítame. Takto dostaneme na stene 15-krát číslo 1 a odložené číslo. Treba si uvedomiť, že takéto dvojičkové párovanie za účelom získania samých 1-tiek vieme vždy spraviť, keďže odložené číslo je párne a tým pádom máme „na jeho oboch stranách" párny počet zvyšných čísel. Z tých 15tich 1-tiek sa nám 14 vzájomne odčíta na 0 a ostane mi na stene už len jedna dvojica (číslo 1 a „odložené" číslo). Keďže „odložené" číslo je o jedna väčšie než číslo, ktoré chceme dostať, tak odčítaním čísla 1 od „odloženého" čísla dostaneme požadované číslo. Tento algoritmus si predvedieme pre číslo 15:

Odložíme si číslo 16 (15 + 1). Ostanú nám dvojičky 30 – 29, 28 – 27, 26 - 25, 24 – 23, 22 – 21, 20 – 19, 18 – 17, 15 – 14, 13 – 12, 11 – 10, 9 – 8, 7 – 6, 5 – 4, 3 – 2. Z týchto dvojičiek nám vznikne 14-krát rozdiel 1 a ešte ostane samotné číslo 1. Jednotky okrem jednej odčítam navzájom a ostane mi na stene dvojica 16 – 1, z ktorej získam 15.

***Príklad č. 4** (opravovala Denisa Múthová)*

Našou úlohou je zistiť, koľko najviac mamutov sa dá nakresliť pomocou v rade za sebou idúcich 100 kameňov. Kamene sú biele a šedé, oboje jedno alebo dvoj-mamutové. Kresliť mamutov ale môžeme len pomocou bielych kameňov.

Kamene sú usporiadané podľa nasledujúcich pravidiel:

- Ak má kameň dvoj-mamutovú veľkosť, tak vedľa neho sú po oboch stranách sivé kamene
- Ak má kameň jedno-mamutovú veľkosť, tak aspoň jeden susedný kameň je sivý

Označme si biele jedno-mamutové kamene B1, biele dvoj-mamutové kameňe B2, a podobne sivé malé kamene S1 a sivé veľké kamene S2.

Chceme v rade použiť čo najviac B2 a čo najmenej S2. Prečo S2? Pretože, ak mame dvoj-mamutový sivý kameň, okolo neho musia byt ďalšie dva sivé. Ak mame S1, stačí nám jeden ďalší sivý teda minieme menej miest, na ktorých by mohli byt biele kamene.

Aký kameň môže byt ako prvý v rade? Podľa prvého pravidla, ak by mal kameň dvoj-mamutovu (ďalej 2M) veľkosť, musel by mať dvoch susedov, tým pádom prvý kameň môže byť iba jedno-mamutový (ďalej 1M). Na druhom mieste musí byt sivý kameň, pretože na prvom mieste je 1M a ten musí mať aspoň jedného šedého suseda.

Rozoberme si teraz akej farby môže byt prvý kameň. Ak bude prvý sivý S1, potom tretí môže byť biely. Akej veľkosti? Chceme čo najviac, tak začnime ak bude tretí B2, potom štvrtý môže byt len S1, a aj piaty bude S1, šiesty môže byt opäť B2 a naša postupnosť sa nám bude opakovať. Dostaneme S1-S1-B2-S1-S1-B2…

Ak bude prvý biely B1, potom tretí môže byt len sivý. Štvrtý môže byt B2 alebo B1 (ale B2 je viac), a potom sa postupnosť z predošlého kroku bude opakovať. Dostaneme B1-S1-S1-B2-S1-S1-B2….

Kombináciu S1-S1-B2 môžeme maximálne použiť 33 krát (lebo 100/3je 33 zvyšok 1). Potom 99ty kameň bude B2 a stý kameň bude S1. Avšak to nesedí, lebo posledný S1 by nemal sivého suseda. Ak použijeme kombináciu S1-S1-B2 len 32 krát, potom máme ešte štyri kamene na doplnenie. Kamene na 97. a 98. pozícii musia byť sivé a zostávajú nám dva kamene. Chýba nám ešte S2, ktorý môžeme použiť a zaň na ste miesto potom môžeme dať len S1. To je dokopy 64 mamutov.

Dá sa aj viac? Skúsme si posledné štyri kamene rozdeliť aj na začiatok radu, kde sme ako videli môžeme použiť ako prvý kameň B1 (za nim S1-S1-B2…). Potom na 98. pozíciu po B2 musíme dať S1, na 99. pozíciu dáme S2 a na stú pozíciu S1. Dokopy dostaneme 65 mamutov. V prípade, že ste nepoužili S2, vedeli ste dať na 99. pozíciu S1 a na stú pozíciu B1 (dokopy 66 mamutov).