SEZAMKO 2020/2021, Vzorové riešenia 2. série zimnej časti

Milí riešitelia,
spolu s druhou sériou sa končí zimná časť tohtoročného SEZAMKA. Amanda a Erik vám všetkým ďakujú za pomoc pri riešení problémov, na ktoré natrafili, a tešia sa na stretnutie 5.12.2020.
Pred vianočnými prázdninami si môžete ešte precvičiť vaše matematické bunky prečítaním týchto vzorových riešení.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMKovi nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Veľa úspechov v druhej sérii vám želajú organizátori SEZAMKa.

Príklad č. 1 (*opravovala Timka Jakubócyová*)

Zo zadania vieme, že Amanda a Erik najskôr zjedli 77 kociek cukru, ktoré tvorili celú vrchnú vrstvu kvádra. Číslo 77 má štyroch deliteľov: 1, 11, 7 a 77. Pomocou týchto deliteľov vieme číslo 77 zapísať dvoma spôsobmi, buď ako $11 \cdot 7$, alebo ako $1 \cdot 77$. Vrchná vrstva kvádra preto mohla vyzerať ako obdĺžnik s rozmermi 11×7 alebo ako obdĺžnik s rozmermi 1×77. Rozoberieme si postupne obidve možnosti.

Prvá možnosť je, že vrchná vrstva je obdĺžnik s rozmermi 11×7. Potom ako zjedli vrchnú vrstvu, zjedli aj celú bočnú vrstvu, v ktorej bolo 55 kociek. Číslo 55 má tiež štyroch deliteľov: 1, 5, 11 a 55. Takže čísla 55 a 77 majú dvoch spoločných deliteľov 1 a 11. Keďže vrchná vrstva má rozmery 11×7 a 7 nie je spoločný deliteľ čísel 55 a 77, znamená to, že spoločná hrana medzi vrchnou a bočnou vrstvou musí byť dlhá 11 kociek. Bočná vrstva bude mať preto tvar obdĺžnika s rozmermi 11×5, pričom 11 kociek je šírka kvádra a 5 kociek je výška kvádra. My však vieme, že toto je výška až po zjedení vrchnej vrstvy. Pred zjedením tejto vrstvy bol kváder o jednu kocku vyšší - výška bola 6 kociek.

Teraz už poznáme rozmery celého kvádra: dĺžka je 7 kociek, šírka je 11 kociek a výška je 6 kociek. Po zjedení vrchnej vrstvy sa zmenšila výška o 1 kocku, takže nová výška je 5 kociek. Po zjedení bočnej vrstvy sa zmenšila dĺžka o 1 kocku, takže nová dĺžka je 6 kociek. A po zjedení prednej vrstvy sa zmenšila šírka o 1 kocku, takže nová šírka je 10 kociek. Rozmery kvádra, ktorý zostal, sú preto $6\times10\times5$. A z toho už vieme vypočítať, že zostalo $6 \cdot 10 \cdot 5 = 300$ kociek. Po zjedení vrchnej, bočnej a prednej vrstvy teda zostalo 300 kociek cukru.

Druhá možnosť je, že vrchná vrstva je obdĺžnik s rozmermi 1×77. Tu si môžeme uvedomiť, že nepotrebujeme zisťovať rozmery celého kvádra. Kváder je buď široký alebo dlhý 1 kocku, takže po zjedení prednej alebo bočnej vrstvy už nezostane žiadna kocka. To znamená, že Amanda s Erikom zjedli všetky kocky cukru, a teda zostalo 0 kociek cukru.

V škatuľke mohlo ostať buď 300, alebo 0 kociek cukru.

Príklad č. 2 (opravoval Hynek Bachratý)

Naša úloha bola na prvý pohľad jednoduchá: V príklade **OCCO** – **ANNA** = 6677 nahradiť písmená ciframi tak, aby výpočet platil. Kto čítal pozorne zadanie, všimol si aj, že podľa zadania nie len rovnaké písmená sa majú nahradiť rovnakými ciframi, ale aj rôzne písmená rôznymi ciframi. A tiež, že čísla **OCCO** a **ANNA** sú štvorciferné, a teda **O** ani **A** by nemala byť nula. (Ak ste ale na štvorcifernosť zabudli, body som nestrhával.)

Úloha sa dala riešiť aj úplným skúšaním, čim viac ste si ale toho všimli na začiatku, o to menej práce bolo treba spraviť. Napríklad ak ste si všimli, že **OCCO** je väčšie číslo ako **ANNA**, zistili ste aj to, že cifra **O** je väčšia ako cifra **A**. A aby nám v poslednom stĺpci odčítania vyšlo **O** – **A** = 7, musia byť tieto dve cifry 9 a 2 alebo 8 a 1. (Ak ste pridali aj 7 a 0, porušili ste štvorcifernosť Anny, ale postup je to inak správny.)

Po tom sa dalo všimnúť, že v prvom stĺpci máme **O** – **A** = 6. To je možné tak, že v odčítaní druhého stĺpca bol prechod cez 10, a „jedna" ktorá nám zostala rozdiel zmenší na 6. A tú istú fintu potrebujeme aj pre tretí a druhý stĺpec, kde tiež **C** – **N** najskôr vyjde 7, a potom už len 6. To sa dá dosiahnuť tak, že cifra **C** je menšia ako **N**, a pri prvom odčítaní nám (s prechodom cez desiatku) vyjde 7. Takéto dvojice **C** a **N** sú 0 a 3 (na túto dvojicu niektorí z vás zabudli, tu ale nula nevadí), 1 a 4, 2 a 5, 3 a 6, 4 a 7, 5 a 8, 6 a 9.

Týchto 7 dvojíc **C** a **N** ste mohli skombinovať s dvomi (niektorí s tromi) dvojicami **O** a **A**. Pri niektorých kombináciách sa ale **O** = **N** alebo **A** = **C** a tieto možnosti bolo treba vylúčiť. Pri dodržaní všetkých podmienok ste tak nakoniec získali desať riešení:

9009 – 2332, 9119 – 2442, 9339 – 2662, 9449 – 2772, 9559 – 2882, 8008 – 1331, 8228 – 1551, 8338 – 1661, 8448 – 1771 a 8668 – 1991.

Príklad č. 3 (opravovala Kika Kovalčíková)

Prvá dôležitá vec, na ktorú bolo treba prísť, je vzdialenosť, ktorú prebehla Amanda, kým sa stretla s Erikom prvý krát. Obidvaja spolu prebehli polovicu kruhu. Celý kruh má 400m, teda jeho polovica má 200m. Keďže z týchto 200m Erik prebehol 80m, tak Amanda musela prebehnúť zvyšných 200 – 80 = 120m.

Koľko metrov prebehli od prvého do druhého stretnutia? Spolu museli prebehnúť toľko, koľko má celá cestička, teda 400m. Do prvého stretnutia spolu prebehli 200m, teraz ešte musia prebenúť dva krát toľko. To znamená, že Amanda musí prebehnúť dva krát toľko, ako prebehla do prvého stretnutia, a Erik tiež. Môžeme si to znázorniť v takejto tabuľke:

	Koľko prebehli po 1. stretnutie	Koľko prebehli od 1. po 2. stretnutie	Koľko prebehli spolu
Erik	80m	160m	240m
Amanda	120m	240m	360m

Ešte skontrolujme, či sa v tomto momente naozaj stretnú. Musí platiť, že dovtedy spolu prebehli 1,5 krát dĺžku celej cestičky, teda 1,5 · 400 = 600m. Platí, že 240m + 360m = 600m? Platí, takže doteraz sme počítali správne. Nakoniec už len vypočítajme, aký je rozdiel medzi tým, koľko Erik a Amanda prebehli: 360m – 240m = 120m.

Rozdiel vo vzdialenostiach, ktoré Erik a Amanda prebehli, je 120m.

Príklad č. 4 (**opravovala Maťa Gaňová**)

Keďže nemáme taký dlhý papier ako Amanda a Erik, kód musíme zistiť inak. Môžeme skúsiť z delenca 300…007 postupne odoberať číslice 0. Skúsime vypočítať, aký výsledok dostaneme s rôznymi počtami núl:

37 : 37 = 1
307 : 37 = 8, zv. 11
3007 : 37 = 81, zv. 10
30 007 : 37 = 811

Väčšina z vás si všimla, že výsledok bezo zvyšku vychádza, len ak je počet núl násobok čísla 3. Vyskúšajme toto pozorovanie na ďalších číslach:

30 000 007 : 37 = 810 811
30 000 000 007 : 37 = 810 810 811

Môžeme si všimnúť, že vo výsledkoch sa na začiatku opakuje niekoľko trojíc číslic 810 a výsledok sa vždy končí trojicou číslic 811. Po pridaní každej ďalšej trojice číslic 000 do delenca, pribudne do výsledku ďalšia trojica číslic 810. Skúsime si číslo obsahujúce 9 núl vydeliť delením pod seba, aby sme zistili, prečo sa trojice číslic opakujú:

30 000 000 007 : 37 = 810 810 811
40
30
300
40
30
300
40
37

Vidíme, že je to preto, že aj zvyšky po jednotlivých krokoch pri delení pod seba sa opakujú (30, 4, 3, 30, 4, 3, 30, …). Preto ak má vyjsť výsledok bezo zvyšku, musí vždy byť počet núl násobkom čísla 3, aby bol zvyšok v poslednom kroku delenia 3. Len vtedy k nemu môžeme pridať číslicu 7, tak aby vzniklo číslo 37, ktoré je deliteľné číslom 37. Ak by zostal v poslednom kroku zvyšok 30 alebo 4, tak po pridaní číslice 7 by číslo nebolo deliteľné číslom 37 (47 : 37 = 1, zv. 10; 307 : 37 = 8, zv. 11). Zároveň vidíme, že posledná číslica výsledku musí byť vždy 1, keďže 37 : 37 = 1. Preto posledná trojica číslic nie je 810, ale 811.

To znamená, že keď vydelíme číslo, ktoré má prvú číslicu 3 a poslednú číslicu 7 a medzi nimi 99 núl, číslom 37, tak nám vyjde celé číslo. Keďže číslo 99 je násobok čísla 3, tak výsledok sa bude skladať z opakujúcich sa trojíc číslic 810 a posledná trojica číslic bude 811. Výsledok bude vyzerať takto: **810 81**0 810...810 8**10 811**.

Kód sa skladá z prvých piatich a posledných piatich číslic tohto čísla,
čiže kód od trezoru je 8108110811.

Iné riešenie:

Niektorí z vás úlohu riešili trochu iným, veľmi pekným spôsobom. Najskôr zistíme, aký bude začiatok podielu:

30 000 000 ….007 : 37 = 810 810...
40
30
300
40
30
…

Teraz zistíme koniec podielu. Môžeme si všimnúť, že vo výsledku sa opakujú trojice číslic 810, pretože sa opakujú aj rovnaké zvyšky v jednotlivých krokoch delenia pod seba (opakujúce sa zvyšky: 30, 4, 3, 30, 4, 3, 30, …). Na získanie prvej číslice výsledku sme „použili“ číslice 3, 0, 0. Na získanie každej ďalšej číslice sme „použili“ vždy už len jednu číslicu 0, respektíve 7 na konci. Číslic 0 je dokopy 99, ale na prvé tri číslice výsledku sme „použili“ 4 číslice 0. Zostalo nám teda 99 - 4 = 95 číslic 0. Týchto 95 číslic si rozdelíme do trojíc a každá trojica núl dá do výsledku trojicu číslic 810. Keďže 95 : 3 = 31, zv.

2, tak vo výsledku bude 32 (31 + 1 = 32) trojíc číslic 810 a zostanú nám posledné tri číslice 0, 0 a 7. Z dvoch číslic 0 pribudnú na koniec výsledku číslice 8 a 1 (zachováva sa postupnosť opakujúcich sa trojíc číslic 810). Do posledného kroku delenia pod seba nám zostane zvyšok 3, ku ktorému pripojíme číslicu 7 a tým dostávame poslednú číslicu výsledku: 37 : *37 = 1.*

30 000 000 … 000 007 : *37 =* ***810 81****0 … 8****10 811***
40
30
300
40
30
…
300