SEZAM, školský rok 2020/21, vzorové riešenia 3. zimnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou sa končí aj zimná časť tohtoročného SEZAMU. Tonko, Miško, Dáška a Baška sa s vami lúčia, ale medzitým vám už určite napísali a pozvali vás sledovať ich príbehy v druhom polroku.
Informácie o sústredení na konci marca sú v priloženej pozvánke, aj tentokrát sa ale asi ešte stretneme len na obrazovka. Objednaná je aj chata v Terchovej, ale ako to dopadne budeme vedieť asi až neskôr.
Aj preto nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk , sledujte nás.
Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravovala Iva Jančigová*)

Začneme tým, že zistíme, aké súčty môžu susedné karty tvoriť. Majú to byť druhé mocniny prirodzených čísel, čiže do úvahy prichádzajú 1, 4, 9, 16, 25, 36, … ale s našimi kartami to budú len 4, 9, 16 a 25. To preto, lebo najväčší možný súčet je 15 + 16 = 31, čiže 36 (a viac) už je príliš veľa a 1 sa nám nepodarí dosiahnuť, pretože najmenší možný súčet je 1 + 2 = 3. Ďalej pre každú kartu zistíme, aké môže mať susedky, aby spolu dávali jeden zo súčtov 4, 9, 16 alebo 25:

karta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
susedka	3	7	1	5	4	3	2	1	7	6	5	4	3	2	1	9
susedka	8	14	6	12	11	10	9		16	15	14	13	12	11	10	
susedka	15		13													

Z tabuľky vidíme, že sa nám **nepodarí usporiadať karty do kruhu**, lebo dve z kariet (8 a 16) majú iba po jednej susedke a v kruhu musí mať každá karta dve susedky. Z tohto zároveň vieme, že ak sa dajú karty usporiadať do radu, tak potom na jednom jeho konci musí byť karta 8 a na druhom karta 16. Začneme rad stavať z oboch strán a ku kartám 8 a 16 priložíme ich jediné možné susedky:

16, 9, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, 1, 8.

Pri karte 1 máme teraz dve možnosti na výber (karty 3 a 15), takže tam zatiaľ nepostupujeme. Budeme postupne pridávať za kartu 9, pokiaľ to bude jednoznačné:

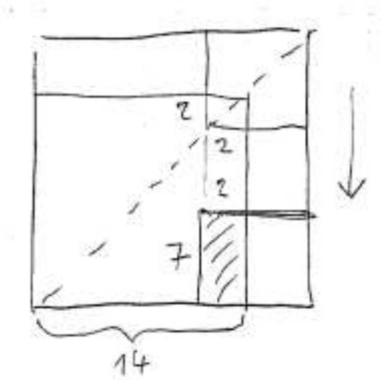
16, 9, 7, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, 1, 8
16, 9, 7, 2, _, _, _, _, _, _, _, _, _, _, 1, 8
16, 9, 7, 2, 14, _, _, _, _, _, _, _, _, _, 1, 8
16, 9, 7, 2, 14, 11, _, _, _, _, _, _, _, _, 1, 8
16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, _, _, _, _, _, _, _, 1, 8
16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, _, _, _, _, _, _, 1, 8
16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, _, _, _, _, _, 1, 8
16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, _, _, _, _, 1, 8
16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, _, _, _, 1, 8

Pri karte 3 máme síce vypísané tri možné susedky, ale dve z nich už boli použité, takže ani tu nemáme na výber:

16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, _, _, 1, 8
16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, _, 1, 8
16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8

Do radu sa teda karty usporiadať dajú, a to práve týmto jedným spôsobom. (Mohli by sme samozrejme začať kartou 8 a končiť kartou 16, ale to považujeme za ten istý rad, lebo každá karta v ňom má tie isté susedky, ako v rade, ktorý začína kartou 16.)

Príklad č. 2 (*opravoval Hynek Bachratý*)



Úloha bola geometrická, tak k nej určite pridám obrázok. (Vaše boli väčšinou krajšie, niekde mi ale chýbali úplne.) Vidíme na ňom obe možnosti prekrytia kobercov a aj to, že od jednej možnosti ku druhej sa môžeme dostať posunutím niektorého (u mňa menšieho) koberca.

Úlohu najskôr vyriešim stručne, ako sa to podarilo väčšine z vás. Ak sú koberce v protiľahlých rohoch, prekrývajú sa v malom **štvorci** s plochou $4m^2$. Malý štvorec má preto rozmery 2×2 metre. Keď malý štvorec posunieme dole, prekrytie sa zmení na obdĺžnik s plochou $14m^2$, a jedna strana zostala 2m. Druhá potom musí byť 7m, čo je aj strana malého štvorcového koberca. Väčší má potom dva krát väčšiu stranu 14m. **Strana sálu je** potom podľa obrázku 7 + 14 – 2 = **19m**, lebo na 2m sa koberce prekrývajú.

Pri opravovaní som si ale uvedomil jednu vec. Časť riešiteľov zdôvodnila a vysvetlila, prečo má prienik protiľahlých kobercov tvar štvorca veľmi starostlivo a presne. Omnoho lepšie ako ja vyššie a lepšie ako ostatní riešitelia. Aby bolo hodnotenie spravodlivé, rozhodli sme sa preto im dať plný počet bodov, a také ako moje riešenie by bolo zatiaľ za 4,5b. Idem ho teda dotiahnuť.

Väčšina dobrých zdôvodnení tvaru štvorca bola založená na vhodnom označení dĺžok a rovniciach. Ja si ale požičiam výborný geometrický nápad od Honzu Vabrouška. To, že prienik protiľahlých kobercov je útvar, ktorého protiľahlé strany sú rovnobežné a susedné strany kolmé je asi jasné. Prienik je preto určite obdĺžnik. Prečo je to ale aj štvorec? Preto, lebo vnútorné vrcholy kobercov ležia na uhlopriečke štvorcového sálu. Ležia preto na nej aj protiľahlé vrcholy ich prieniku. Teda uhlopriečka prieniku zviera so svojimi stranami tiež uhol 45^0 . A takýto obdĺžnik už musí byť štvorec.

Príklad č. 3 (opravovala Kika Kovalčíková)

Viacerí ste si všimli, že počet koscov musí byť nejaký násobok 3, keďže sa potom rozdelia na tretiny. Označme si teda počet koscov ako $3k$. Budeme sa snažiť zistiť, koľko je k. Zo zadania vieme, že každý kosec kosil nepretržite buď 4h alebo 8h. Označme si teda písmenkom L takú plochu lúky, ktorú jeden kosec pokosí za 4h.

Poďme sa pozrieť na to, akú plochu pokosili kosci na **veľkej lúke**. Za prvé doobedie $3k \cdot L$, za poobedie $k \cdot L$, za druhý deň $2 \cdot L$, teda spolu $3k \cdot L + k \cdot L + 2 \cdot L =$ $\mathbf{(4k + 2) \cdot L}$

Koľko sa pokosilo na **malej lúke**? Za prvé poobedie $2k \cdot L$, za druhý deň $2 \cdot L$, teda spolu $2k \cdot L + 2 \cdot L =$ $\mathbf{(2k + 2) \cdot L}$

Teraz potrebujeme nájsť také k, aby platilo, že malá lúka má plochu 2/3 z veľkej. Teda keď plochu veľkej lúky vydelíme 3 a vynásobíme 2, dostaneme plochu malej lúky:

$$\begin{aligned}
(\text{veľká lúka} : 3) \cdot 2 &= \text{malá lúka} && / \cdot 3 \\
\text{veľká lúka} \cdot 2 &= \text{malá lúka} \cdot 3 && \\
(4k + 2) \cdot L \cdot 2 &= (2k + 2) \cdot L \cdot 3 && / :L \\
8k + 4 &= 6k + 6 && / -6k-4 \\
2k &= 2 && / :2 \\
k &= 1 &&
\end{aligned}$$

Z rovnice nám vyšlo, že k=1, to znamená, že **na začiatku boli traja kosci.**

Príklad č. 4 (opravovali Maťka Gaňová a Timka Jakubócyová)

Ako prvé si musíme uvedomiť, že ak nemá byť súčin troch činiteľov deliteľný prvočíslom väčším ako 3, tak môže byť deliteľný jedine prvočíslami 2 a 3 (prípadne číslom 1). Takisto jeho činitele n + 1, n + 3 a n + 5 musia spĺňať túto podmienku. Keby boli deliteľné väčším prvočíslom, týmto väčším prvočíslom by bol deliteľný aj ich súčin, čo nechceme.

Keď sa pozrieme na deliteľnosť číslom 3, zistíme, že práve jeden z činiteľov n + 1, n + 3 a n + 5 je deliteľný číslom 3. Ukážeme si, prečo je to tak. Činiteľ n + 1 môže mať po delení číslom 3 zvyšok 0, 1 alebo 2:

- Ak dá činiteľ n + 1 po delení tromi zvyšok 0, tak je deliteľný číslom 3. Potom činiteľ n + 3 dá zvyšok 2, lebo n + 3 = (n + 1) + 2, a činiteľ n + 5 dá zvyšok 1, lebo n + 5 = ((n + 1) + 3) + 1.
- Ak dá činiteľ n + 1 po delení tromi zvyšok 1, tak o dva väčší činiteľ n + 3 dá o dva väčší zvyšok, takže zvyšok 0. No a činiteľ n + 5 je o dva väčší ako činiteľ n + 3, takže dá zvyšok 2.
- Ak dá činiteľ n + 1 po delení tromi zvyšok 2, tak činiteľ n + 3 dá zvyšok 1 a činiteľ n + 5 dá zvyšok 0.

Zvyšné dva činitele, ktoré nie sú deliteľne číslom 3, musia vo svojom prvočíselnom rozklade obsahovať už len prvočísla 2. Prípadne jeden z činiteľov môže byť 1. Zároveň rozdiel činiteľov musí byť buď 2 (v prípade dvoch po sebe idúcich činiteľov) alebo 4 (v prípade prvého a tretieho činiteľa). Ľahko zistíme, že existujú len dve dvojice čísel, ktoré spĺňajú tieto podmienky. Sú to čísla 2 a 4 alebo čísla 4 a 8.

V prvom prípade máme dve možnosti. Buď n + 1 = 2 a n + 3 = 4, z čoho dostávame riešenie n = 1 a súčin bude $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Alebo n + 3 = 2 a n + 5 = 4, z čoho však nedostaneme žiadne riešenie, lebo v tomto prípade by n = -1 a číslo -1 nie je prirodzené číslo.

V druhom prípade je len jedna možnosť. Činiteľ n + 1 = 4 a činiteľ n + 5 = 8, z čoho dostávame riešenie n = 3 a súčin bude $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Organizátori musia pripraviť 2 ceny.