SEZAMKO 2018/2019, Vzorové riešenia 2. série zimnej časti

Milí riešitelia,
spolu s druhou sériou sa končí aj zimná *<u>korešpondenčná</u>* *časť tohtoročného SEZAMKA.*
Athena a Porthos vám všetkým ďakujú za pomoc pri riešení problémov, na ktoré natrafili. Pokiaľ chcete vedieť, ako si oni predstavovali ich riešenia, precvičte si vaše matematické bunky prečítaním týchto vzorových riešení.
<u>Ale hlavne si prečítajte priloženú pozvánku! Pokiaľ si chcete SEZAMKA užiť celého a až do konca, príďte sa s nami stretnúť 1. decembra do Žiliny!</u>
(A nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk)

Veľa úspechov vám želajú organizátori SEZAMKa.

Príklad č. 1 (**opravoval Hynek Bachratý**)

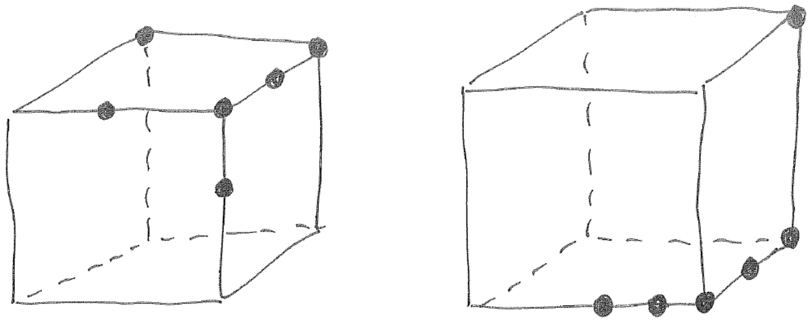
Rozsadiť včely na kocku z vosku tak, aby ich na každej stene bol iný počet, sa dalo mnohými spôsobmi. Stále ale bolo pri tom treba myslieť na to, že k tomu chceme čo najmenej včiel.

Skúsime preto najskôr určiť najmenšie rôzne počty včiel, ktoré by mali obsadzovať jednotlivé steny. Keďže môžeme mať aj stenu s 0 včelami, najmenší celkový počet pre šesť stien bude $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ včiel.

Keby všetky včely sedeli niekde blízko stredu stien, bolo by ich naozaj treba 15. Včela si ale môže sadnúť aj na hranu, a vtedy sa zaráta do počtu včiel na oboch susedných stranách. Dve včely vo vnútri strany tak môžeme nahradiť jednou včelou na hrane. A pokiaľ včelu posadíme do vrcholu kocky, môže nahradiť až 3 včely. Toto určite treba čo najlepšie využiť.

Pokiaľ by sme teda všetky včely posadili na vrcholy, miesto 15 včiel by nám tak stačilo $15 : 3 = 5$ včiel. Dá sa ale s 5 včelami dosiahnuť potrebné obsadenie stien? Žiaľ nie. Na najviac obsadenej stene musíme mať 5 včiel, tá ma ale len 4 vrcholy. Aspoň jedna včela by tak musela sedieť na hrane, ale potom by už 5 včiel nevedelo nahradiť všetkých 15.

Ak sa to 5 včelám nepodarí, nestačí už 6? Stačí, a veľa z vás našlo rôzne spôsoby ako to dosiahnuť. Na obrázku vidíte dva z nich. Všimnite si, že na jednom sú steny s 0 a s 5 včelami oproti sebe, a na druhom vedľa seba. A tiež, že na oboch, ako aj na všetkých vašich ďalších riešeniach, 3 včely sedeli na vrchole a 3 na hranách. Preto vedeli nahradiť $3 \cdot 3 + 3 \cdot 2$, teda všetkých 15 včiel.



Poznámka k bodovaniu:

Niektorí boli pri obsadzovaní stien kocky menej pozorný a potrebovali 7 alebo viac včiel. Ale aj oni si mysleli, že našli najlepšie riešenie! A pretože sa to nepokúsili zdôvodniť, nenašli lepšie riešenie so 6 včelami. Podobne ale bolo treba zdôvodniť aj to, že 6 je najmenší potrebný počet včiel. Preto plný počet dostali len tí, ktorí okrem správneho rozmiestnenia včiel pridali aj zdôvodnenie, prečo 5 včiel nestačí.

Príklad č. 2 (*opravovala Ivka Hrivová*)

Našou úlohou je zistiť, či Athena vie vytvoriť z kopy 17 čokoládových mincí niekoľko kôpok po 5 čokoládových minciach.

Prvý krok úlohy je jasný. Athena musí zjesť jednu čokoládovú mincu z danej kopy (keďže je kopa zatiaľ iba jedna, nemá si akú inú vybrať). Teraz má kopu so 16 mincami. Chce ju rozdeliť na 2 menšie kôpky, pričom obe môžu obsahovať ľubovoľný počet čokoládových mincí (samozrejme, spolu tieto dve kôpky musia obsahovať 16 mincí).

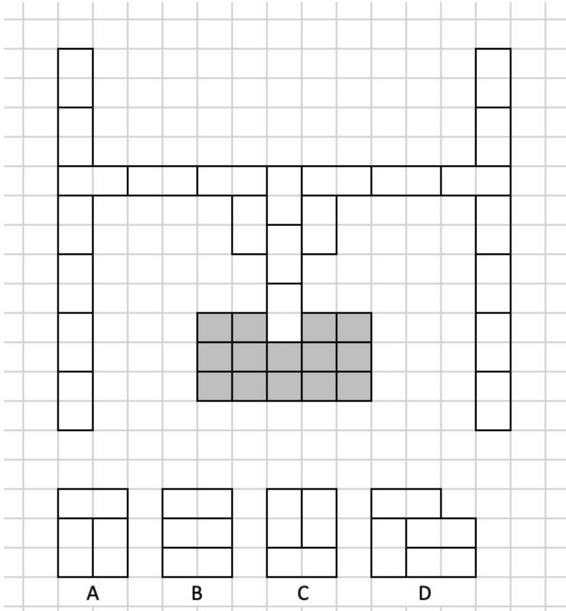
Aby sa vedela dopracovať ku kôpkam s 5 mincami, nesmie vytvoriť ani jednu kôpku s počtom mincí menším ako je 5. Teda rozdelenia 15–1, 14–2, 13–3 a 12–4 nevyhovujú. Ostali potenciálne rozdelenia 11–5, 10–6, 9–7 a 8–8 (ďalšie ako napríklad 7–9 už zahrnuté máme, keďže kôpky považujeme za rovnocenné).

V prípade 8–8 by pri nasledujúcom delení 8-mincovej kôpky jednu mincu zjedla a delila počet 7. Zo 7 mincí ale nevytvorí dve kôpky s aspoň 5 mincami, čiže táto možnosť nevyhovuje. V prípade 9–7 rovnako. Ani číslo 8, ani číslo 6 (keďže prvý ťah by spočíval v zjedení jednej mince z vybranej kôpky) nevie rozdeliť na dve kôpky s aspoň 5 mincami. To isté platí aj pri možnosti 10–6, tam by musela deliť kôpku s 9 alebo 5 mincami na dve menšie. Takže ani táto možnosť nevyhovuje.

Ostáva posledná možnosť. Preto aj druhý krok je jasný. 16 mincovú kôpku musí teraz Athena rozdeliť na 11-mincovú kôpku a 5-mincovú kôpku. Cieľom úlohy je vytvoriť kôpky po 5 minciach a preto 5-mincová kôpka je už v správnom tvare a Athena bude deliť tú druhú, 11-mincovú kôpku. Zje jednu mincu a ostane jej 10 mincí. Tam už je delenie jednoznačné, pretože 10 = 5 + 5, a teda ju rozdelí na dve 5-mincové kôpky a úloha je vyriešená ☺.

Príklad č. 3 *(opravovala Iva Jančigová)*

Keď začneme dláždiť zo štyroch rohov smerom do stredu, tak položíme veľa dlaždíc, ktorých poloha je jednoznačná – inak byť nemôžu.



Jediné miesto, kde máme viac možností, je na obrázku vyznačené sivou. Na tomto mieste máme dva typy dláždení.

V prvom prípade položíme v strede jednu dlaždicu zvislo a ešte máme po stranách dva obdĺžniky 2×3, ktoré potrebujeme pokryť. Každý obdĺžnik 2×3 môže byť vydláždený troma rôznymi spôsobmi (na obrázku sú označené A, B, C). Preto máme deväť možností pre dvojicu obdĺžnikov – každá s každou: AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC.

V druhom prípade nepoložíme v strede jednu zvislú dlaždicu, ale dve vodorovné. Nemôžu trčať každá do inej strany od stredu, lebo by nám na každej strane ostalo päť štvorčekov a tie sa dlaždicami 2×1 pokryť nedajú. Čiže obe trčia na jednu stranu a jednoznačne určia, ako tá strana ďalej vyzerá (na obrázku D vidíme ako to vyzerá, keď sú smerom doľava, doprava by to bolo zrkadlovo). V oboch prípadoch nám na druhej strane ostane obdĺžnik 2×3, o ktorom už vieme, že má tri možnosti. Takže spolu je možností šesť: DA, DB, DC, AD(zrkadlové), BD(zrkadlové), CD(zrkadlové).

Celkovo teda máme 9+6=15 rôznych možností vydláždenia chodníka.

***Príklad č. 4** (opravovala Ajka Kucharíková)*

Väčšina z vás si to najskôr skúšala. Po viacerých pokusoch ste si všimli, že sa vám nikdy nedarí zažať všetkých šesť svetiel, a že vždy zostane aspoň jedno vypnuté. Takže prvá dôležitá časť je uvedomiť si, že niektoré príklady nemusia mať riešenie, a že aj to je výsledok. Druhá, náročnejšia časť je vysvetliť, prečo sa to nikdy nedá. Ak to nevysvetlíme, tak nám ostatnú otázky: Čo ak by sme začali s iným svetlom na začiatku? Alebo by sme dlhšie zapínali a vypínali zapínače? Nešlo by to predsa?

Tak to skúsme zdôvodniť. Na začiatku máme zapnutý 1 zapínač a 5 vypnutých. Teda máme nepárny počet zapnutých aj vypnutých zapínačov. Na konci potrebujeme mať 6 zapnutých a 0 vypnutých zapínačov, čo je párny počet. Keď budeme chvíľu vypínať a zapínať zapínače tak zistíme, že sa nám darí mať vždy zapnutých 1, 3, alebo 5 zapínačov. Ale nikdy sa nám nedarí zapnúť párny počet zapínačov. Prečo?

Skúsme sa pozrieť, čo sa môže stať pri jednom prepnutí. Máme tri možnosti. Buď zapneme dve vypnuté zapínače, teda celkový počet zapnutých zapínačov zvýšime o dva. Alebo vypneme dve zapínače, teda celkový počet zapnutých zapínačov znížime o dva. Posledná možnosť je, že jeden zapínač zapneme a druhý vypneme. V tom prípade sa celkový počet zapnutých zapínačov nezmení. Na začiatku začíname s nepárnym počtom zapnutých zapínačov. Tento počet meníme len o dva, alebo vôbec a tým pádom zostane stále nepárny. No a na splnenie úlohy potrebujeme párny počet zapnutých zapínač, takže sa to nedá.

Svetlo sa nám nikde nepodarí zapnúť, bez ohľadu na to, ktorý zapínač je na začiatku zapnutý.

Poznámka k bodovaniu:

V zadaní sme písali o šiestich obyčajných zapínačoch, zatiaľ čo na obrázku bol každý nakreslený s dvomi tlačidlami. Obrázok bol nepresný a ospravedlňujeme sa. Tím čo riešili kvôli obrázku trochu iný príklad, sme to samozrejme uznali.