SEZAM, školský rok 2018/19, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,
V obálke ste si našli zadania posledného, 3. zimného kola. Možno ste sa už pustili do ich riešenia. Reno, Magdaléna, Jacob, Diana a Arcus sa tešia, že im pomôžete aj s ich ďalšími problémami, na ktoré natrafia pri svojich dobrodružstvách v okolí pevnosti Carcassonne.
Určite ste si ale pozorne pozreli aj opravené riešenia druhého kola. Pokiaľ Vás zaujíma, ako sa dali riešiť inak alebo lepšie, prečítajte si tieto vzorové riešenia. Určite to bude aj dobrá rozcvička pre vaše matematické bunky....
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk
Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravovala Kristína Kovalčíková*)

Táto úloha bola ťažká ani nie tak kvôli tomu, že by bolo ťažké nájsť jej riešenie. To väčšina z vás bravúrne zvládla. No keď už raz nájdete to najlepšie riešenie, máte za sebou len polovicu roboty. Druhá polovica roboty spočíva v tom, že treba ukázať, že lepšie sa to už naozaj nedá. Na toto ste veľmi často zabudli.

Najprv sme sa vás pýtali, či sa dajú zavesiť všetky košele. Keďže máme najviac čiernych košelí, začnime s nimi. Je ich 64. Medzi nimi je 63 medzier. Ak by sme chceli všetky medzery zaplniť aspoň dvoma inými košeľami, tých iných košieľ by sme potrebovali 2x63 = 126. Toľko ich ale nemáme, máme ich len 63 (lebo sivých bolo 32, bielych bolo 16 a tak ďalej, dokopy 32+16+8+4+2+1 = 63).

Druhá otázka bola, koľko najviac vieme košelí povešať. Z predošlej úvahy je vidno, že iných ako čiernych košelí je málo na to, aby zaplnili všetky medzery. Koľko najviac medzier medzi čiernymi košeľami teda vieme zaplniť? V každej medzere musia byť aspoň dve, takže najviac vieme zaplniť 63:2 = 31,5 medzery. Zaplňme teda 31 medzier a pozrime sa, čo nám zostane. 32 čiernych košieľ bude visieť, 31 medzier medzi nimi bude zaplnených. Zostane nám ešte jedna nezavesená inofarebná košeľa, ktorú by sme mohli dať za poslednú čiernu. Takýmto spôsobom bude zavesených 95 košieľ.

Poďme sa ešte pozrieť na to, či nájdeme aspoň jeden spôsob, ako tých 95 košieľ zavesiť. Dá sa to vôbec? Nie je tam ešte nejaký zádrheľ, ktorý sme si doteraz nevšimli? Skúsme takto: postupne budeme striedať trojice košieľ vo farbách čierna, sivá, biela, čierna, sivá, biela... až kým sa nám biela neminie. Keď sa minie, nahradíme ju postupne ostatnými farbami –hnedou, modrou, zelenou a medenou. Prvé dve košele v trojici budú zakaždým čierna a sivá. Keď takto budeme vešať až kým sa nám farebné košele neminú. Na koniec môžme za poslednú, medenú, zavesiť ešte jednu čiernu a jednu sivú košeľu.

Takto ich bude zavesených presne 95

***Príklad č. 2** (opravoval Jakub Kaloč)*

Väč3ina z vás si na začiatku označila čísla na stenách a vrcholoch kocky. Označme čísla na stenách a, b, c, d, e, f. Je dôležité si uvedomiť, že Magda na steny písala prirodzené čísla, teda celé čísla od 1 vyššie. Čísla na vrcholoch si označme A, B, C, D, E, F, G, H. Vieme, že Reno každé z týchto čísiel na vrchole dostal ako súčin čísiel na stenách, ktoré sa pri tom vrchole stretali. Tento fakt môžeme zapísať a dostaneme:

$A = a \cdot d \cdot e$	$E = a \cdot d \cdot f$
$B = a \cdot b \cdot e$	$F = a \cdot b \cdot f$
$C = b \cdot c \cdot e$	$G = b \cdot c \cdot f$
$D = c \cdot d \cdot e$	$H = c \cdot d \cdot f$

Nakoniec Diana vypočítala, že súčet čísel pri vrcholoch je 105, teda

$$A + B + C + D + E + F + G + H = 105$$

Veľa z vás začalo takto vzniknutý výraz upravovať. Najprv dosaďme za A, B, C, D, E, F, G, H:

$$(a \cdot d \cdot e) + (a \cdot b \cdot e) + (b \cdot c \cdot e) + (c \cdot d \cdot e) + (a \cdot d \cdot f) + (a \cdot b \cdot f) + (b \cdot c \cdot f) + (c \cdot d \cdot f) = 105$$

Postupne upravujeme výraz ďalej vynímaním:

$$(a \cdot d + a \cdot b + b \cdot c + c \cdot d) \cdot e + (a \cdot d + a \cdot b + b \cdot c + c \cdot d) \cdot f = 105$$

$$(a \cdot d + a \cdot b + b \cdot c + c \cdot d) \cdot (e + f) = 105$$

$$(a \cdot d + a \cdot b + c \cdot b + c \cdot d) \cdot (e + f) = 105$$

$$(a \cdot [d + b] + c \cdot [b + d]) \cdot (e + f) = 105$$

$$(a \cdot [d + b] + c \cdot [d + b]) \cdot (e + f) = 105$$

$$(\{a + c\} \cdot [d + b]) \cdot (e + f) = 105$$

$$(a + c) \cdot (d + b) \cdot (e + f) = 105$$

Pozerajme sa teraz na $(a + c)$, $(d + b)$, $(e + f)$ ako na tri čísla. Vidíme, že 105 je vlastne súčin troch čísel.

Viacerí ste teraz skúsili spraviť prvočíselný rozklad 105, ktorý vyzerá takto: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Keďže a, b, c, d, e, f mohli byť najmenej jeden, pretože vieme, že sú to prirodzené čísla, tak zátvorky $(a + c)$, $(d + b)$, $(e + f)$ mohli mať hodnotu najmenej dva. Preto nie je potrebné skúmať, či tieto tri zátvorky nemohli byť súčin $1 \cdot 1 \cdot 105$ alebo $1 \cdot 15 \cdot 7$ a tak ďalej. Keďže sme v našom prvočíselnom rozklade dostali, že 105 sa dá vyjadriť ako súčin práve troch čísiel $3 \cdot 5 \cdot 7$, tak sme po vylúčení jednotky dostali jedinú možnost a to, že $105 = (a + c) \cdot (d + b) \cdot (e + f) = (3) \cdot (5) \cdot (7)$

Našťastie nás nezaujíma aké čísla boli napísané na jednotlivých stenách kocky, ale ich súčet, teda $a + b + c + d + e + f$. Na to nám stačí už len jednoduché dopočítanie:

$$a + b + c + d + e + f = (a + c) + (d + b) + (e + f) = 3 + 5 + 7 = 15$$

Teda súčet čísel na stenách Magdinej kocky je 15.

Viacerí z Vás sa zamýšľali ako to je s nulou. Niektoré definície ju radia medzi prirodzené čísla a niektoré nie. Poďme sa pozrieť ako by vyzeralo naše riešenie, keby pracujeme aj s nulou. Pozrime sa znova na výraz (a + c) . (d + b) . (e + f) = 105. Znova máme súčin troch čísiel, ktoré nám dajú 105, avšak tentoraz zátvorka môže mať hodnotu 1, keďže s nulou vieme spraviť súčet v zátvorke (0 + 1). Nájdeme teda ako sa dá rozložiť 105 na súčin troch čísel:

105 = 3 . 5 . 7

105 = 1 . 3 . 35

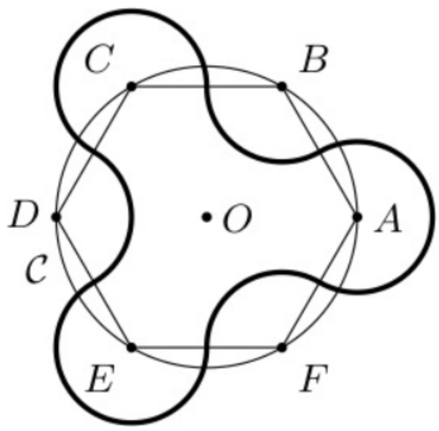
105 = 1 . 7 . 15

105 = 1 . 5 . 21

105 = 1 . 1 . 105

Z toho podobne ako predtým dopočítame naše hľadané súčty a dostaneme, že súčty na stenách Magdinej kocky mohli byť 15, 39, 23, 27 a 107. Ak ste predpokladali, že nula je prirodzené číslo, bolo samozrejme treba nájsť všetky tieto riešenia.

***Príklad č. 3** (opravovala Katka Jasenčáková)*



Chodník sa skladá z úsekov šiestich kružníc, ktoré majú stredy v jabloniach. Sú to kružnice s rovnakým polomerom, pretože ten je zo zadania polovicou dĺžky strany pravidelného šesťuholníka.

Časti kružníc so stredom v bodoch A, C a E prislúchajú uhlu s veľkosťou 240°. Čo sú dve tretiny obvodu týchto kružníc. Tie, ktoré majú stredy v bodoch B, D a F k uhlu s veľkosťou 120° a teda sú to tretiny obvodu týchto kružníc. Keď tieto časti sčítame, dostaneme dĺžku chodníka. To je veľkosť troch obvodov kružníc, so stredom v jabloniach.

Ak spojíme stred O kružnice c s vrcholmi pravidelného šesťuholníka, rozdelíme ho takto na šesť trojuholníkov. Keďže je šesťuholník pravidelný, uhly týchto trojuholníkov pri vrchole O sú šestinou z 360° uhla. Strany trojuholníkov, ktorých jeden vrchol je O sú rovnako dlhé, pretože sú polomerom kružnice c. Teda tieto trojuholníky sú rovnoramenné a ramená zvierajú uhol 60°. Keďže zvyšné dva uhly sú rovnako dlhé, musia mať 60°.

Takže sme šesťuholník rozdelili na zhodné rovnostranné trojuholníky. Teda veľkosť strán šesťuholníka je rovnaká ako polomer kružnice c. Tá je zo zadania rovná polomeru malých kružníc, ktoré majú stredy v jabloniach. Preto tieto kružnice majú polovičný priemer ako kružnica c. Takže majú aj polovičný obvod, čo je 10 metrov.

Dĺžka chodníka je preto 3.10 = 30 metrov.

Príklad č. 4 (opravovala Slavo Hanzely)

Našou úlohou je zistiť, koľko dukátov a centov mali chlapci dostať. Na to, aby sme s vedeli povedať, koľko **určite** mali dostať, musíme nájsť **všetky riešenia**.

Označme si D počet dukátov a C počet centov, koľko mali chlapci dostať. Aké môžu byť hodnoty C a D? Počet centov C musí byť medzi 0 a 99. Môžeme si všimnúť, že keďže chlapci dostali viac peňazí, ako mali dostať, platí D<C. Preto aj D musí byť medzi 0 a 99.

Jedna z možností, ako úlohu vyriešiť, je postupne vyskúšať **všetky dvojice** C, D spĺňajúce podmienky vyššie a pre každú možnosť overiť, či mohli dostať toľko dukátov a centov. Takýto postup je síce jednoduchý, ale veľmi prácny, preto sa v ňom možno ľahko pomýliť (takých dvojíc C, D je viac ako tisíc). Preto sa pokúsme pomôcť si hlavou a zjednodušiť si skúšanie možností.

Vieme, že 100 centov je 1 dukát, preto si môžeme dukáty previesť na centy. Ako sa menila hodnota peňazí u chlapcov?
Mali dostať peniaze v hodnote 100D + C centov. Pokladník im zamenil počty dukátov a centov, od neho dostali peniaze v hodnote 100C + D centov.
Po minutí 5 centov mali 100C+D-5, uvedomili si, že to je dvojnásobok toho, čo mali dostať.
Preto 100C+D-5=(100D+C)x 2, po úprave 98C=199D+5.

Počet centov si vieme vypočítať ako C= (199D+5)/98. Vie nám tento tvar nejako pomôcť? Určite áno. Ak by sme skúšali možnosti, tak už nepotrebujeme skúšať všetky dvojice C, D. Stačí nám skúšať všetky možnosti D-čka a dopočítať hodnotu C ako (199D+5)/98. Ak dostaneme celé číslo, máme riešenie. Teraz nám stačí vyskúšať 100 možností. To síce môžeme spraviť, ale dosadenie každého čísla od 0 do 99 a vyrátanie C je ešte stále dosť práce. Pokúsme sa ešte viac si zjednodušiť úlohu.

Zamyslime sa, ako pri tomto skúšaní (ako bolo spomenuté o riadok vyššie) dostaneme riešenie. Riešenie dostaneme, ak je C celé číslo, teda keď 98 delí 199D+5. Teda pre nás sú zaujímavé zvyšky po delení 98. Všimnime si, že 199D+5=98D+98D+3D+5. Keďže 98D je deliteľné 98, výraz 3D+5 má rovnaký zvyšok po delení 98 ako 199D+5.

Zistili sme, že D je vhodný počet centov ak 3D+5 je deliteľné 98. Aké násobky 98 môže 3D+5 nadobúdať? D je menšie ako 100, preto 3D+5 je menšie ako 305. Jediné násobky 98 menšie ako 305 sú 0, 98, 196 a 294. Možné D-čka sú teda (0-5)/3, (98-5)/3 = 31, (196-5)/3, (294-5)/3. Keďže D musí byť celé číslo, jediné možné D je 31. To vedie ku C= (199x31+50)/98 =63.

Našli sme jediné riešenie (môžeme si overiť, že sedí), chlapci mali z pokladnice zobrať 31 dukátov a 63 centov.