# SEZAM, školský rok 2019/20, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,
práve sa vám do rúk dostali zadania poslednej, 3. zimnej série tohtoročného SEZAMu. Lucy, Anke, Gallo a Pierre vám z dedinky Hadar ďakujú za všetky vaše riešenia. Teraz vás čaká tretia séria a posledná šanca zabojovať o účasť na zimnom sústredení. Predtým, než sa pustíte do riešenia, prečítajte si ešte tieto vzorové riešenia. Dozviete sa, kde ste spravili prípadné chyby, a možno aj iné spôsoby ako sa dali úlohy vyriešiť.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

## *Príklad č. 1 (opravoval Janči Jakubík)*

Pierra zaujíma, či môže Lucy mať dvakrát viac čučoriedok ako malín, ak začína s jednou alebo s dvoma čučoriedkami. Počet čučoriedok na konci hry si označme písmenom Č, počet malín písmenom M a počet bobuľovín (t. j. čučoriedok a malín dokopy) písmenom B. Ak má Lucy na konci hry dvakrát viac čučoriedok ako malín, tak Č = 2M. Všimnime si, že číslo Č dvojnásobok čísla M, takže Č musí byť párne. Celkový počet bobuľovín na konci je B = Č + M = 2M + M = 3M, takže B je trojnásobkom počtu malín M. Ak je nejaké číslo trojnásobkom iného čísla, potom musí byť deliteľné tromi bezo zvyšku. Takže B je deliteľné tromi bezo zvyšku.

Pri každej výmene dá Lucy 1 čučoriedku, za ktorú dostane 5 malín, alebo opačne dá 1 malinu za ktorú dostane 5 čučoriedok. Takže po každej výmene sa počet bobuľovín, ktoré má Lucy, zvýši o 4. Všimnime si aj, že pri každej výmene pripočítame alebo odpočítame k počtu čučoriedok a malín nepárne číslo (1 alebo 5). Z toho vyplýva, že po každej výmene sa zmení parita počtu čučoriedok aj malín.

Predpokladajme, že Lucy začína s jednou čučoriedkou. Prvé dve výmeny sú potom jednoznačne určené. V prvej výmene musí dať Lucy 1 čučoriedku, za ktorú dostane 5 malín, a v druhej výmene musí dať Lucy 1 malinu, za ktorú dostane 5 čučoriedok. V nasledujúcej tabuľke sú vypísané stavy po 0 až 14 výmenách. Pre každý stav je uvedený celkový počet bobuľovín a parita počtu čučoriedok a malín. Ak je počet bobuľovín deliteľný troma bezo zvyšku, tak sú uvedené aj počty čučoriedok a malín, ktoré by docielili, že Lucy má dvakrát viac čučoriedok než malín.

| Počet výmen | Počet bobuľovín | Počet čučoriedok | | Počet malín | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | nepárne | 0 | párne |
| 1 | 5 | 0 | párne | 5 | nepárne |
| 2 | 9 | 5 | nepárne | 4 | párne |
| 3 | 13 | | párne | | nepárne |
| 4 | 17 | | nepárne | | párne |
| **5** | 21 | 14 | párne | 7 | nepárne |
| 6 | 25 | | nepárne | | párne |
| 7 | 29 | | párne | | nepárne |
| 8 | 33 | 22 | nepárne | 11 | párne |
| 9 | 37 | | párne | | nepárne |
| 10 | 41 | | nepárne | | párne |
| **11** | 45 | 30 | párne | 15 | nepárne |
| 12 | 49 | | nepárne | | párne |
| 13 | 53 | | párne | | nepárne |
| 14 | 57 | 38 | nepárne | 19 | párne |

Z tabuľky si môžeme všimnúť, že po druhom ťahu bude každá ďalšia tretia výmena taká, že po jej ukončení bude celkový počet bobúľ deliteľný tromi bezo zvyšku. Je to preto lebo po troch ťahoch vždy pripočítame 3 · 4 = 12 bobúľ, čo je násobok troch.

Chceme, aby bol počet bobuľovín na konci hry deliteľný tromi bezo zvyšku, takže hra musí skončiť v jednej z výmen 2, 5, 8, 11 alebo 14 (alebo prípadne v neskoršej výmene mimo tabuľku). Navyše vieme, že počet čučoriedok musí byť párny, čo vylučuje počty výmen 2, 8 a 14. Počet výmen teda musí byť 5, 11, alebo viac ako 14. Po chvíli skúšania pre najmenší z týchto počtov, teda 5, nájdeme nasledujúce riešenie:

| Výmena č. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Počet Č | 1 | 0 | 5 | 10 | 9 | 14 |
| Počet M | 0 | 5 | 4 | 3 | 8 | 7 |

Našli sme aspoň jedno riešenie, teda vieme odpovedať na prvú Pierrovu otázku. Lucy môže mať dvakrát viac čučoriedok ako malín, ak začínala len s jednou čučoriedkou.

Teraz predpokladajme, že Lucy začína s dvoma čučoriedkami. Dostaneme veľmi podobnú tabuľku ako v predošlom prípade.

| Počet výmen | Počet bobuľovín | Počet Č | | Počet M | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 | párne | 0 | párne |
| 1 | 6 | 1 | nepárne | 5 | nepárne |
| 2 | 10 | | párne | | párne |
| 3 | 14 | | nepárne | | nepárne |
| **4** | 18 | 12 | párne | 6 | párne |
| 5 | 22 | | nepárne | | nepárne |
| 6 | 26 | | párne | | párne |
| 7 | 30 | 20 | nepárne | 10 | nepárne |
| 8 | 34 | | párne | | párne |
| 9 | 38 | | nepárne | | nepárne |
| **10** | 42 | 28 | párne | 14 | párne |
| 11 | 46 | | nepárne | | nepárne |
| 12 | 50 | | párne | | párne |
| 13 | 54 | 32 | nepárne | 18 | nepárne |
| 14 | 58 | | párne | | párne |

Podobne ako v predošlom prípade vieme zistiť, kedy musí hra skončiť, ak má mať Lucy dvakrát viac čučoriedok než malín. V tomto prípade to môže byť buď po 4 výmenách, alebo 10 výmenách, alebo viac než 14 výmenách. Na rozdiel od minulého prípadu je teraz jednoznačne určená iba prvá výmena. Po nej sa už Lucy môže rozhodnúť, či dá Lucy jednu čučoriedku, alebo jednu malinu.

Možností ako spraviť prvé 4 výmeny nie je príliš veľa a rýchlo zistíme, že sa nevieme dostať do stavu s 12 čučoriedkami a 6 malinami. Konkrétne vieme mať po 4 výmenách buď 4 čučoriedky a 14 malín, alebo 10 čučoriedok a 8 malín, alebo 16 čučoriedok a 2 maliny. Všimnime si, že v prostrednom prípade sa oproti stavu po prvej výmene počet čučoriedok zvýšil o 9 a počet malín o 3. Ak teda ďalšie tri výmeny spravíme rovnako, tak sa počty zvýšia rovnako, a teda čučoriedok bude 10 + 9 = 19 a malín bude 8 + 3 = 11. No a keď to isté zopakujeme aj pre ďalšie tri výmeny, tak dostaneme 19 + 9 = 28 čučoriedok a 11 + 3 = 14 malín. Teda počty, ktoré sme chceli dosiahnuť. Riešenie opäť zapíšeme pomocou tabuľky:

| Výmena č. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Počet Č | 2 | 1 | 6 | 11 | 10 | 15 | 20 | 19 | 24 | 29 | 28 |
| Počet M | 0 | 5 | 4 | 3 | 8 | 7 | 6 | 11 | 10 | 9 | 14 |

Opäť sme našli aspoň jedno riešenie, teda vieme odpovedať na Pierrovu otázku. Lucy môže mať dvakrát viac čučoriedok ako malín, ak začínala len s jednou čučoriedkou.

Keď sme odpovedali na Pierrove otázky tak sme zistili, že pri každej výmene pripočítavame/odpočítavame k/od počtu čučoriedok aj malín nepárne číslo (1 alebo 5). Takže po každej výmene sa zmení parita počtu čučoriedok aj malín. Ak teda začíname s jednou čučoriedkou (nepárny počet) a s nula malinami (párny počet) tak po každej výmene budú mať počet čučoriedok a počet malín rôznu paritu. Tieto počty preto nikdy nebudú rovnaké, takže odpoveď na Gallovu otázku je nie.

### *Príklad č. 2 (opravovali Jožo Rajník a Robka Juriková)*

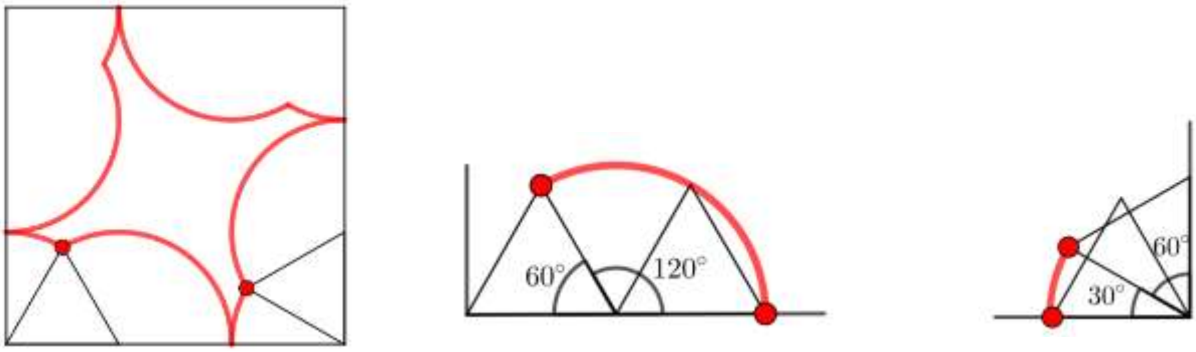
Máme rovnostranný trojuholník položený v rohu štvorca. Rovnostranný trojuholník má všetky uhly rovnaké a majú veľkosť 60 stupňov. Vždy, keď točíme trojuholníkom, tak jeden bod sa nehýbe a je to práve ten, okolo ktorého sa trojuholník točí. Môžeme si to predstaviť ako keby do jedného vrcholu zapichneme klinec a trojuholník potom okolo tohto klinca otáčame. Z toho vidíme, že zvyšné dva body sa hýbu po kružnici so stredom v nehybnom bode a polomerom 3cm. Vždy keď trojuholník otočíme, tak sa pazúrik buď nepohne, alebo sa pohne po kružnicovom oblúku prislúchajúcemu danému stredovému uhlu.

Po prvom otočení prešiel pazúrik kružnicový oblúk prislúchajúci stredovému uhlu s veľkosťou 120 stupňov, pretože je to susedný uhol k 60-stupňovému (180° - 60° = 120°). To zodpovedá dráhe

$$(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot 120/360 = (2 \cdot \pi \cdot 3\text{ cm}) \cdot 120/360 = 2\pi\text{ cm}.$$

Keď otáčame druhýkrát, pazúrik je stredom kružnice, teda stojí na mieste.

Pri treťom otočení preklápame trojuholník na inú stranu štvorca. Takže akoby ho len




„doklopíme" na tú stranu. Pazúrik sa pohne po kružnicovom oblúku prislúchajúcemu uhlu 30 stupňov, pretože uhol v štvorci má veľkosť 90 stupňov a 90° - 60° = 30°. To zodpovedá dráhe

$$(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot 30/360 = (2 \cdot \pi \cdot 3\text{ cm}) \cdot 30/360 = (1/2)\pi\text{ cm}.$$

Teraz máme trojuholník položený v rohu druhej strany presne tak, ako to bolo na začiatku. (Akoby len otočíme štvorec o 90 stupňov doľava.) Takže keď budeme trojuholník ďalej otáčať, pazúrik spraví rovnaký pohyb ešte trikrát, po každej strane štvorca práve raz. Takže dĺžka stopy pazúrika bude $4 \cdot (2\pi + (1/2)\pi)$ cm = $10\pi$ cm. To je po zaokrúhlení približne 31,42 cm.

## ***Príklad č. 3*** (*opravovala Erika Novotná*)

Úlohu budeme riešiť tak, že budeme uvažovať o tom, ktoré tvrdenia môžu a ktoré musia byť pravdivé. V riešení ich budeme z hora nadol označovať postupne ako prvý, druhý až siedmy výrok.

Mnohí z vás začali tým, že číslo 45 považovali za najvyšší teoretický počet bobúľ bez akéhokoľvek zdôvodnenia. To je však to isté, ako keby sme povedali, že 4. tvrdenie je za každých okolností pravdivé. V tomto prípade to je pravda, no treba to aj nejako pekne zdôvodniť. Jedno z najkrajších zdôvodnení je z pera *Františka Mikuláša* a znie nasledovne, citujem: *Keďže máme 7 výrokov, 4 nepravdivé a 3 pravdivé, tak ak by som chcel vyskúšať všetky možnosti, bolo by ich veľmi veľa. Nie však všetky možnosti sa dajú urobiť. Napríklad 4tý výrok musí byť vždy pravdivý, pretože inak by museli byť prvé 4 výroky nepravdivé (Ak by bol totiž napríklad pravdivý druhý výrok, musí byť spolu s ním pravdivý aj 3tí a 4tý). To sa nedá, keďže môžu byť nepravdivé len 3.*

Skúsme teraz uvažovať, že výroky 1., 2., 3. sú nepravdivé a výrok 4. je pravdivý – teda hľadáme počet bobúľ medzi číslami 37 až 45 (vrátane čísel 37 a 45). Keďže v tomto prípade by sme zatiaľ mali iba jeden výrok pravdivý, zostávajúce tri výroky by museli byť tiež pravdivé. Teda hľadané číslo by bolo násobkom 3 a súčasne 4, čiže by bolo násobkom čísla 12. To však nespĺňa žiadne číslo medzi 37 a 45. Hľadané číslo teda musí byť menšie ako 37.

Ďalej ideme vyskúšať možnosť, že platia výroky 3. a 4. a neplatia 1. a 2. – teda hľadáme počet bobúľ medzi číslami 30 až 36 (vrátane čísel 30 a 36). Keďže zatiaľ máme pravdivé dva výroky, zo zvyšných troch musia byť tiež pravdivé práve dva a to:

- Ak by bol pravdivý 5. a 6. výrok a nebol pravdivý 7., tak by hľadané číslo muselo byť deliteľné 2 a 3 (čiže deliteľné číslom 6) a nesmelo by byť deliteľné číslom 4. Núkajú sa násobky čísla 6 a to 30 a 36. Číslo 36 však musíme vylúčiť, lebo je deliteľné číslom 4. Našli sme počet bobúľ **30**.
- Ak by bol pravdivý 5. a 7. výrok a nebol pravdivý 6., tak by hľadané číslo muselo byť deliteľné 2 a 4 (čiže deliteľné číslom 4) a nesmelo by byť deliteľné číslom tri. Násobky čísla 4 sú v tomto rozhraní dve a to 32 a 36. Číslo 36 je však deliteľné 3mi, teda ho musíme vyhodiť. Našli sme ďalší vhodný počet bobúľ **32**.
- Ak by bol pravdivý 6ty a 7mi výrok a nebol pravdivý výrok číslo 5, tak by hľadané číslo muselo byť deliteľné číslom 4 a nemohlo by byť párne. Toto však nie je možné, preto túto možnosť musíme zahodiť.

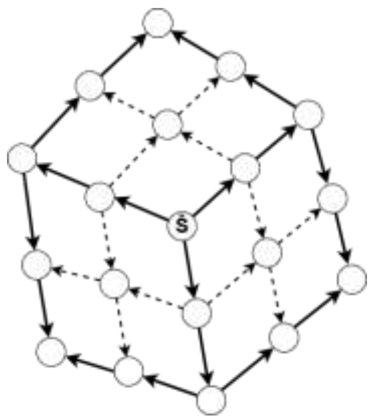
Ak by sme chceli hľadať ďalej, museli by sme za pravdivú uvažovať už aj druhú podmienku, hľadali by sme teda medzi číslami menšími ako 30. Ak by sme aj nejaké našli, boli by tieto menšie ako 32, čo je najväčšie z doteraz nájdených vhodných čísel. Teda počet bobúľ **32** je hľadané riešenie. A naozaj, platia preň štyri výroky 3., 4., 5. a 7. a neplatia tri výroky 1., 2. a 6.

## ***Príklad č. 4*** (*opravoval Adam Kňaze*)

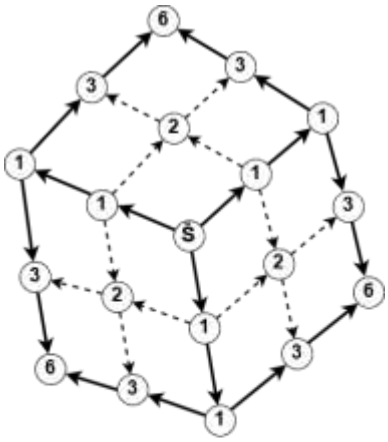
Hľadáme najkratšie cesty na vrchol kocky. Prvá otázka znie – aká dlhá je najkratšia cesta? Odpoveď je šesť, a prečo je to tak ľahko uvidíme, keď kocku zvalíme na bok (tak aby ležala na jednej svojej stene). Potrebujeme sa dostať do protiľahlého rohu kocky, čo bude vždy vyžadovať prejsť dve liany smerom dohora, dve liany smerom dozadu a dve liany smerom do strany. Nie je podstatné kedy pôjdeme ktorým smerom (môžeme ísť napríklad hore, do strany, hore, dozadu, dozadu, do strany), podstatné je, že vždy prejdeme dĺžku šesť lián. Zároveň, keďže môžeme ísť iba smerom hore a nemôžeme sa vracať, nevieme do vrcholu prísť cez viac ako šesť lián.

Ťažšia otázka je, koľko rôznych takýchto najkratších ciest vedie na vrchol kocky. Len tak bez rozmýšľania nevieme povedať, koľko presne to je. Vieme sa však pozrieť na všetky križovatky, z ktorých vedie liana priamo do vrcholu. Keď spočítame súčet počtov spôsobov ako sa dá dostať do týchto križovatiek, tak dostaneme počet spôsobov ako sa dostať na vrchol kocky. Príliš sme si nepomohli lebo stále nevieme koľkými spôsobmi sa dá dostať do týchto križovatiek. Keď však takto budeme pokračovať ďalej opakovať rovnakú logiku znovu a znovu, dostaneme sa až na spodok kocky. Na spodku kocky je začiatok a do križovatiek ktoré sú s ním spojené lianou sa dá dostať vždy iba jedným spôsobom. Keď vieme, koľkými spôsobmi sa dá dostať do križovatiek pri spodku, vieme zistiť aj koľkými spôsobmi sa dá dostať do križovatiek nad nimi. A toto vieme opakovať zase až po vrchol.

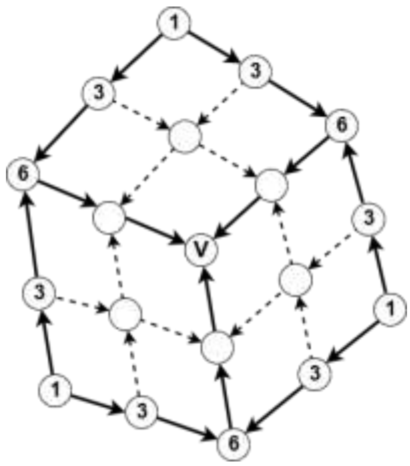
Poďme teda na to. Ešte si však potrebujeme kocku nejako znázorniť, aby sa nám spôsoby dobre počítali. Tu ste mali viacerí z vás problémy. Totiž ak ste sa na ňu pozerali z boku, často ste zabudli na cesty ktoré išli „za roh" (prešli do časti, ktorú nebolo vidieť). Veľmi dobrý spôsob ako sa na kocku môžeme pozrieť je priamo zospodu – z bodu kde je zapichnutá v zemi sa pozrieme priamo hore.




Uvidíme niečo podobné ako na prvom obrázku. Hrubé čiary sú hrany kocky, krúžky križovatky kde sa stretávajú liany a bod Š je štart, miesto kde je kocka zapichnutá v zemi a lovci začínajú. Šípka na každej liane ukazuje ktorým smerom je hore (lovci môžu liezť iba tým smerom). Teraz môžeme zaradom od spodku vypĺňať do každej križovatky počet spôsobov ako sa dá do nej dostať. Do križovatiek susediacich so štartom sa dá dostať vždy len jedným spôsobom. Do každej ďalšej sa dá dostať toľkými spôsobmi, koľkým sa dá dostať do križovatiek ktoré na ňu ukazujú (vedie k nej od nich liana). Keď vyplníme všetky križovatky dostaneme nasledovné počty.




Primárne nás zaujíma vrchol kocky, ktorý je na druhej strane od nášho nákresu. Kocku si teda musíme otočiť a pozrieť sa na ňu pre zmenu z vrchu. V strede kde bol štart je teraz vrchol. Križovatky na krajoch obrázku vidno aj zhora, treba si ale dať pozor aby boli správne počty v správnych križovatkách. Kocka teraz vyzerá nasledovne:




V tomto kroku už vieme, čo máme robiť. Stačí nám doplniť počty spôsobov do chýbajúcich križovatiek a dostaneme sa až k vrcholu. Teraz môžeme pekne vidieť, že do vrcholu sa dá dostať presne 54 spôsobmi.