JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU

SEZAM, školský rok 2020/21, vzorové riešenia 2. zimnej série

Milí riešitelia,
práve sa vám do rúk dostali zadania poslednej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Rušňovodič Tonko a kamaráti Miško, Dáška a Baška vám z Mazes Expresu ďakujú za všetky vaše riešenia.
Teraz vás čaká tretia séria a posledná šanca zabojovať o účasť na zimnom sústredení (chata je objednaná na marec, či sa na ňu dostaneme je teraz asi ešte vo hviezdach…). Predtým, než sa pustíte do 3 série si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia. Dozviete sa kde ste spravili prípadné chyby, a možno sa dozviete aj iné spôsoby, ako sa dali úlohy vyriešiť.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

*Príklad č. 1 (*opravovala *Vierka Glevitzká*)

Máme sedem konektorov A, B, C, D, E, F, G a sedem konektorov 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Chceme ich spojiť práve siedmymi káblami tak, aby hodnota $A \cdot B \cdot C + D \cdot E \cdot F \cdot G$ bola prvočíslo a každému písmenu bolo pridelené jedno číslo. Bolo by veľmi časovo neefektívne skúšať všetky možnosti (i keď aj tak sa niekedy dá úloha vyriešiť), takže by sme chceli ich počet nejako zmenšiť.

Chceme aby výsledkom bolo prvočíslo, čo teda vieme o prvočíslach? Sú to čísla s práve dvomi deliteľmi. Číslo 2 je najmenšie z nich a je taktiež jediné párne. (Skúste sa zamyslieť, prečo sú zvyšné prvočísla nepárne.) Takže čo musí spĺňať $A \cdot B \cdot C + D \cdot E \cdot F \cdot G$, aby hodnota mohla byť prvočíslom? Musí byť nepárne, keďže vidíme, že jeho hodnota sa nebude rovnať dvom. Poďme sa teda pozrieť, kedy to môže nastať.
Výpočet $A \cdot B \cdot C + D \cdot E \cdot F \cdot G$ sa skladá z dvoch sčítancov $A \cdot B \cdot C$ a $D \cdot E \cdot F \cdot G$. Kedy bude ich súčet nepárny? Aké môžu byť parity týchto dvoch čísel? Ak si nie ste istí, skúste o tom chvíľku popremýšľať pred tým, ako budete čítať ďalej. Vieme, že platí:

párne + párne = párne
párne + nepárne = nepárne + párne = nepárne (pri sčítaní nezáleží na poradí)
nepárne + nepárne = párne

Hodnota $A \cdot B \cdot C + D \cdot E \cdot F \cdot G$ môže byť teda prvočíslom iba ak z čísel $A \cdot B \cdot C$ a $D \cdot E \cdot F \cdot G$ je jedno párne a jedno nepárne. Ako to vieme docieliť? Ak chceme dostať násobením nepárne číslo, ani jeden z činiteľov nemôže byť párny. Inak by bol náš výsledok deliteľný číslom 2, a teda párny. Pri násobení nezáleží na poradí, takže čísla $A \cdot B \cdot C$ a $D \cdot E \cdot F \cdot G$ môžeme vnímať aj ako dve skupiny čísel, v rámci ktorých sa všetky navzájom násobia. Ak priradíme nejaké číslo jednej skupine, nemusíme sa zaoberať akému konkrétnemu písmenu ho priradíme. V jednej skupine teda musia byť iba nepárne čísla, aby mohol byť celkový súčet prvočíslom.

Teraz už môžeme s ľahkosťou prejsť všetky možnosti a pre každý výsledok overiť, či ide o prvočíslo. (Ak chcete, skúste si to.) Ukážeme si však, že nám stačí overiť iba jednu možnosť.

Vyššie sme si všimli, že súčet čísel deliteľných dvomi je sám o sebe deliteľný dvomi. Rovnako aj súčet čísel deliteľných tromi je sám o sebe deliteľný tromi. To teda znamená, že tak ako párne čísla (2, 4 a 6) musia byť spolu v jednej skupine, musia byť aj čísla deliteľné tromi (3 a 6) v jednej skupine. Preto jediná možnosť, kedy máme šancu dostať prvočíslo, je keď sú čísla 2, 3, 4 a 6 v jednej skupine. Poďme sa teda pozrieť, či naozaj vznikne prvočíslo:

$$1 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 35 + 144 = 179$$

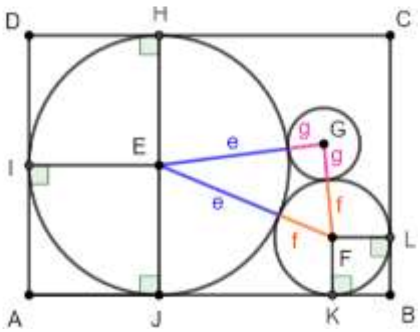
$179 : 2 = 89{,}5$
$179 : 3 = 59{,}66...$
$179 : 5 = 38{,}8$
$179 : 7 \doteq 25{,}57$
$179 : 11 = 16{,}2727...$
$179 : 13 \doteq 13{,}77$

(Ak chcete, môžete sa ešte zamyslieť nad tým, prečo nám stačí overiť deliteľnosť čísel menších ako odmocnina zo 179.)
Vieme vytvoriť iba jedno prvočíslo 179.

***Príklad č. 2** (opravovala Števka Glevitzká)*

Na výpočet obsahu obdĺžnika by sa nám zišli dĺžky jeho strán. Máme však zadané len vzdialenosti stredov kruhov. Obrázok nám napovedá, že sa nám budú hodiť veľkosti polomerov kruhov. Pokúsme sa ich teda nájsť.

V prvom rade si ich pomenujme, nech sa nám o nich lepšie rozpráva. Polomery kruhov so stredmi postupne v bodoch E, F a G budeme volať postupne e, f a g. Môžeme si všimnúť, že úsečky EF, EG a FG prechádzajú dotykovými bodmi kruhov (rozmyslite si, prečo to tak je). Preto sa úsečka EF skladá z polomerov e a f, úsečka EG sa skladá z polomerov e a g a úsečka FG sa skladá z polomerov f a g. Niektorí z vás si tak rovno napísali tri rovnice a z nich potom zistili veľkosti polomerov (to sa dá rôznymi peknými spôsobmi). My si ukážeme, ako sa to dá aj bez rovníc.

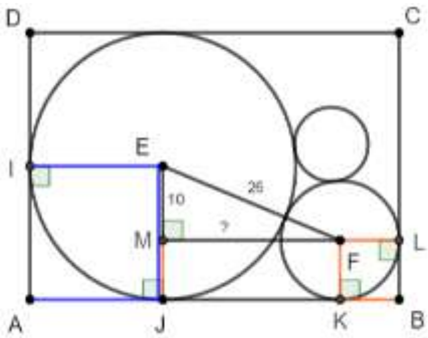


Zoberme si niektoré dve z úsečiek EF, EG a FG, napríklad úsečky EF a EG. Vidíme, že polomer e majú spoločný, no úsečka EF je o 3 dlhšia ako EG. Preto aj f musí byť o 3 dlhší ako g, teda f = g + 3. Zároveň f + g = 13 (tvoria spolu úsečku FG, tá má dĺžku 13). Keď to spojíme, dostaneme 13 = f + g = (g + 3) + g = 2 · g + 3. Preto 2 · g = 10, a teda g = 5. Teraz už ľahko dopočítame f = 8 a e = 18. Tie isté úvahy by sa dali využiť, aj keby si vyberieme inú dvojicu úsečiek.

Super, tak už poznáme polomery kruhov. Ako ich teda využiť? Mohlo by nám pomôcť, že kruhy sa dotýkajú obdĺžnika ABCD. Označme si teda ich dotykové body tak ako na obrázku, nech sa o nich môžeme lepšie rozprávať. Z obrázku to vyzerá, že by sme vedeli ľahko spočítať dĺžku strany AD. Ako na to? Strany AD, BC ale aj úsečka JH majú konce na stranách AB a CD. Navyše, všetky tri sú tiež kolmé na AB a CD (tie sú rovnobežné). Vďaka tomu majú úsečky AD, BC a JH rovnakú dĺžku. Oba koncové body úsečky JH ležia aj na okraji najväčšieho kruhu, tak asi tušíme, že jej dĺžku vieme spočítať najjednoduchšie. Keďže AB a CD sú rovnobežné a polomery EH a EJ sú na ne kolmé, tak HJ je priemer najväčšieho kruhu. Jeho polomer už poznáme, preto |AD| **=** |HJ| = 2 · e = 2 · 18 **=** 36.

Dĺžku jednej zo strán obdĺžnika už máme, chceli by sme ešte druhú. Môžeme si všimnúť, že dotykové body J a K rozdeľujú stranu AB na tri časti, pričom dĺžky úsečiek AJ a KB vieme ľahko zistiť. Totiž (obrázok nám možno napovie) útvar AJEI je štvorec. To preto, že všetky jeho vnútorné uhly sú pravé a zároveň úsečky EI a EJ sú rovnako dlhé. Z toho vieme, že |AJ| = 18. To isté môžeme zopakovať pre útvar KBLF, z čoho dostaneme |KB| = 8.

Chýba nám už iba dĺžka úsečky JK. To je vlastne vzdialenosť priamok EJ a FK, keďže obe sú kolmé na stranu AB. Uvedomme si však, že dĺžku JK má aj hocijaká iná úsečka rovnobežná so stranou AB, ktorej konce sú na priamkach EJ a FK. Špeciálne, jednou z nich je aj taká, ktorá končí v bode F. Skúsime ju využiť, tak si jej druhý koniec označme M. (Miesto nej by sme si mohli zobrať aj rovnobežku prechádzajúcu cez bod E, ostatné však nie sú o moc lepšie ako naša úsečka JK.) Čo ešte vieme o úsečke MF povedať? Keďže je rovnobežná s AB, tak je kolmá na EJ. Čiže pri M sú pravé uhly. To jednak znamená, že trojuholník EMF je pravouhlý, no taktiež útvar JKFM je obdĺžnik. Teda nielen |JK| = |MF|, ale aj |MJ| = |FK|. My už ale vieme, že |FK| = f = 8, a teda aj |MJ| = 8. Taktiež vieme, že EJ je polomer e. Preto |EM| = |EJ| – |MJ| = 18 – 8 = 10.



V pravouhlom trojuholníku EMF tak poznáme dĺžky dvoch strán, a tak môžeme použiť Pytagorovu vetu na výpočet dĺžky tretej strany. Tá hovorí, že keď v pravouhlom trojuholníku označíme ako a, b strany zvierajúce pravý uhol a stranu oproti pravému uhlu označíme c, tak potom platí $c^2 = a^2 + b^2$. Pre trojuholník EMF teda platí $26^2 = 10^2 + |MF|^2$. Takže $|MF|^2 = 676 - 100 = 576$, preto $|MF| = \sqrt{576} = 24$.

Nakoniec už len ľahko spočítame |AB| = |AJ| +|JK| + |KB| = 18 + 24 + 8 = 50, vďaka čomu vieme spočítať obsah obdĺžnika ako $\mathbf{S_{ABCD}}$ **=** |AB| · |AD| = 50 · 36 **= 1800**.

Príklad č. 3 *(opravovala Eliška Kaločová)*

K tejto úlohe sa dalo pristupovať dvomi spôsobmi, pričom oba sme uznali ako správne. Základnou myšlienkou celého riešenia je, že chceme nájsť 12 po sebe idúcich symetrických rokov tak, aby bol rozdiel medzi najväčším a najmenším minimálny.

Prvý spôsob bol všeobecnejší a nezohľadňoval rok, ktorý je aktuálne podľa kalendára, ktorý používame. Keďže chceme zistiť koľko najmenej rokov sa mohol pra…pradedko dožiť, je jasné, že potrebujeme nájsť dvanásť symetrických rokov, ktoré sú čo najbližšie pri sebe. Pokiaľ má číslo párny počet cifier, je možné ho rozdeliť presne na dve polovice. Pokiaľ chceme zo symetrického čísla s párnym počtom cifier spraviť iné symetrické s čo najmenej zmenami a číslo nepredlžovať, tak môžeme zmeniť jednu cifru v ľavej polovici a zrkadlovo aj cifru v pravej polovici. Ak chceme nájsť symetrické čísla, ktoré sú čo najbližšie, tak sa možno bude zdať, že najvýhodnejšie je meniť cifru na pozícii jednotiek, avšak tu je treba si uvedomiť, že tým sa zmení aj cifra v druhej polovici a to na najvyššej pozícii. Keďže najväčšie rozdiely budú záležať od toho, čo sa zmení v ľavej polovici, je pre nás najvýhodnejšie meniť cifry na najnižšej pozícii v ľavej polovici čísla. To však znamená, že najlepšie je meniť prostredné dve cifry, aby sme dostali po sebe idúce čísla. Takýchto čísiel vieme nájsť vždy 10 za sebou, kedy je v strede 00, 11, 22, …, 99. Potom nastane znova zmena na 00, avšak poposúvajú sa aj najbližšie okolité cifry o 1.

Pri štvorciferných číslach sú prostredné cifry desiatky a stovky, kde keď obe zvýšime o 1, dostaneme rozdiely medzi symetrickými číslami 110. Pri šesťciferných číslach sú v strede už stovky a tisícky a rozdiely budú 1100. Pokiaľ budeme čísla predlžovať stred sa bude posúvať ďalej a ďalej a rozdiely budú stále väčšie a väčšie.

Pokiaľ má číslo nepárny počet cifier, je možné ho rozdeliť na polovice tak, že jedno číslo ostane v strede. Rovnakou úvahou ako pri číslach s párnym počtom cifier zistíme, že najlepšie je meniť práve strednú cifru, aby sme dostali čo najmenšie rozdiely. Aj tu je podstatné podotknúť, že čím je číslo dlhšie, tým sa stredná pozícia posúva viac doľava a rozdiely pri zmene sa zvyšujú.

Zatiaľ sme podrobne neskúmali prechody z 99 na 00, z 9 na 0, alebo predĺženie čísla o jednu cifru, čo sa stane vždy až po desiatich symetrických číslach, ktoré sme rozoberali. To znamená, že niečo takéto sa za život pra pra…pradedka určite stalo, ale len raz alebo dva krát.

Pri druhom menej všeobecnom spôsobe ste skúmali len symetrické roky do roku 2002. Pri tomto postupe bolo treba zdôvodniť, že ďalej ste nepokračovali, pretože to bol posledný symetrický rok pred súčasnosťou. Aj tu však bolo dôležité preskúmať všetky symetrické roky a nájsť tie s naozaj najmenšími rozdielmi, pri čom rozdelenie rokov na tie s párnym a nepárnym počtom cifier vedelo značne pomôcť.

Keď už sme sa presvedčili, že príliš dlhé čísla nám nepomôžu, je dobré sa vrátiť k tým najkratším. To sú buď dvojciferné, alebo trojciferné čísla – stále nám záleží na párnom a nepárnom počte cifier. Dvojciferných symetrických čísiel je 10 a všetky majú medzi sebou rozdiel jedenásť rokov. Trojciferných čísiel je už viac. Pokiaľ meníme len strednú cifru, tak je rozdiel vždy desať rokov.
Teraz je čas pozrieť sa podrobne aj na prechody, ktoré sme predtým opomenuli. Pri prechode z 99 na najbližší symetrický rok sa dostaneme na 101. Podobne to funguje pri každom predĺžení čísla, teda aj z 999 na 1001, 9999 na 10 001, … a rozdiel bude vždy dva. Pri trojciferných číslach sa časom zmení stredná cifra deväť na nulu (191 na 202, 292 na 303, …). Pri týchto prechodoch je vždy rozdiel medzi číslami jedenásť.

Z predošlých úvah vyplýva, že najvýhodnejšie je zobrať desať po sebe idúcich trojciferných rokov, medzi ktorými sú rozdiely desať a k nim jednu dvojicu, medzi ktorou je rozdiel len 2. Pre poslednú dvojicu už potom neostane iná možnosť ako rozdiel jedenásť. Takto nám vzniknú celkom tri možnosti, kedy mohol pra…pradedko oslavovať narodeniny:

1) 88 (rozdiel 11) 99 (rozdiel 2) 101 (rozdiel 10) 111 (rozdiel 10) 121 (rozdiel 10) 131 (rozdiel 10) 141 (rozdiel 10) 151 (rozdiel 10) 161 (rozdiel 10) 171 (rozdiel 10)181 (rozdiel 10) 191

2) 99 (rozdiel 2) 101 (rozdiel 10) 111 (rozdiel 10) 121 (rozdiel 10) 131 (rozdiel 10) 141 (rozdiel 10) 151 (rozdiel 10) 161 (rozdiel 10) 171 (rozdiel 10)181 (rozdiel 10) 191 (rozdiel 11) 202

3) 898 (rozdiel 11) 909 (rozdiel 10) 919 (rozdiel 10) 929 (rozdiel 10) 939 (rozdiel 10) 949 (rozdiel 10) 959 (rozdiel 10) 969 (rozdiel 10) 979 (rozdiel 10) 989 (rozdiel 10) 999 (rozdiel 2) 1001

Keďže chceme zistiť koľko najmenej rokov sa mohol pra…pradedko dožiť, tak si treba uvedomiť, že sa pra…pradedko musel narodiť v symetrickom roku. Niektorí ste deň narodenia nerátali ako "nulté" narodeniny a zdôvodnili ste, že keďže oslavoval až tie prvé, tak sa narodil rok pred symetrickým rokom. Aj tu boli oba spôsoby správne, pokiaľ bolo vysvetlené, prečo ste sa tak rozhodli. Pri oboch postupoch sú však tri možnosti, kedy sa mohol narodiť. Posledné narodeniny, ktoré pra…pradedko oslavoval boli tie v symetrickom roku, teda **podľa vami zvoleného riešenia sa dedko mohol dožiť buď 103, alebo 104 rokov a narodiť sa buď v jednom z rokov 88, 99, 898, alebo 87, 98, 897.**

Príklad č. 4 (opravoval Mojo Majdiš)

Najlepšie, čo môžeme spraviť je skúsiť si zahrať zopár partií hry. Skúsil som tak teda spraviť aj ja. Prvá vec, ktorá mi udrela do očí je, že posledným víťazným ťahom vždy zoberiem posledné tri cukríky na kope. Skutočne, pridať na kopu jeden cukrík, aby tam nebolo nič, nie je možné. A teda vyhrať môžeme len ťahom "zober tri cukríky".

Druhá skutočnosť, ktorá je veľmi zaujímavá, je taká, že pri niektorých kôpkach vždy vyhrá Baška a pri niektorých vždy Dáška. Napríklad, keď je na začiatku šesť cukríkov, tak nech som sa snažil akokoľvek, Dáška nikdy nevyhrala. Pri siedmich mala takúto smolu Baška. Ale pozor. To ešte neznamená, že to tak je vždy. Mohol som len byť nešikovný hráč. Potrebovalo by to teda nejaké poriadne zdôvodnenie.

Poďme teda postupne skúšať rôzne kôpky. Ak začíname s jedným cukríkom, tak Dáška má len jednu možnosť, a to pridať cukrík (rozmyslite si prečo). Následne Baška tiež musí pridať cukrík. Na kôpke sa ocitli tri cukríky, ktoré Dáška zoberie a tým vyhrá. Pri dvoch cukríkoch musí Dáška prvým ťahom opäť jeden pridať, tu však Baška zoberie druhým ťahom tri cukríky a vyhrá. Pri troch cukríkoch môže samozrejme Dáška vyhrať bez toho, aby pustila Bašku na ťah.

Trochu sa nám to skomplikuje pri štyroch cukríkoch. Tu má totiž Dáška na začiatku dve možnosti. Ak by prvým ťahom zobrala tri cukríky, na kope by ostal jeden a vynútenými ťahmi (tak ako sme to popísali už vyššie), by došlo k víťazstvu Bašky. Ak by však Dáška prvým ťahom jeden pridala, Baška by svojim ťahom tri zobrala. Tým by na kope ostali dva cukríky, a teda Dáška by musela jeden pridať a opäť by vyhrala Baška. Pri piatich cukríkoch sa situácia opäť trochu sprehľadní. Dáška by zobrala tri, Baška by musela jeden pridať a Dáška by zobrala posledné tri. Zatiaľ sme teda prišli na to, že Dáška vie vyhrať pri 1, 3 a 5 cukríkoch. Prehráva pri 2 a 4. Niektorí už z toho vytušili nejakú pravidelnosť. Iní nie a tí môžu skúšať ďalej, pokým si niečo nevšimnú.

Ja som si všimol nasledovnú vec: Dáška zatiaľ vždy vyhrá pre nepárny počet cukríkov a Baška pre párny. Bude to však platiť aj pre väčšie počty cukríkov? Pozrime sa na to, čo sa s paritou cukríkov deje počas hry. Ak máme pred sebou párny počet cukríkov a tri zoberieme, ostane nám nepárny počet (rozmyslite si prečo). Takisto ak jeden pridáme, tak sa počet stane nepárny. Naopak, ak je na kope nepárny počet cukríkov, tak či už tri zoberieme, alebo jeden pridáme, ostane nám párny počet cukríkov. Takže parita sa vždy zmení! Na kope teda bude na striedačku párny a nepárny počet cukríkov. Striedajú sa nám však aj Dáška a Baška. A teda po ťahu jednej z nich bude na kope vždy párny počet cukríkov a po ťahu druhej nepárny. Keďže vyhráva tá, po ťahu ktorej je na kope nula cukríkov a nula je párne číslo, tak vyhráva to z dievčat, po ktorej ťahoch budú na kope párne počty cukríkov.

To vie Dáška docieliť tak, že na začiatok dá na kopu nepárny počet cukríkov. A nech už robí čokoľvek, po jej ťahu ostane vždy párny počet cukríkov a po Baškinom nepárny. A teda Baška nemá šancu vyhrať.

Viacerých z vás ešte napadlo, či v takom prípade Baška nevie vymyslieť stratégiu, aby museli hrať donekonečna a hru tým pádom nikto nevyhrá. Ako ste však poukázali, v takom prípade Dáška proste vždy keď môže zoberie tri cukríky, a tým pádom celkový počet cukríkov klesá (Baška môže len korigovať rýchlosť tohto klesania tým, či zoberie tri alebo pridá jeden). A po istom čase už počet cukríkov isto klesne na päť, alebo menej. A to už sú prípady ktorých stratégiu sme si detailnejšie popísali vyššie. **Dáška teda zvíťazí vždy, keď dá na začiatok na kopu nepárny počet cukríkov.**