JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU

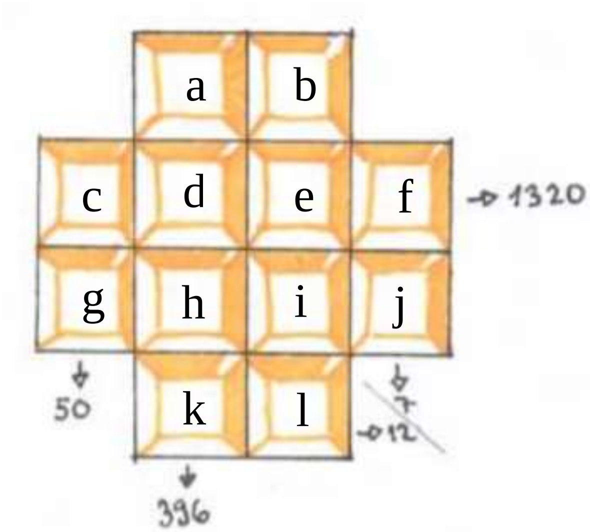
SEZAM, školský rok 2020/21, vzorové riešenia 1. letnej série

Milí riešitelia,
práve sa k vám dostali zadania druhej letnej série tohtoročného SEZAMu. Tonko, Miško, Dáška a Baška sú vďační za vašu pomoc s problémami z prvej série a veria, že sa úspešne popasujete aj s úlohami z druhej série. Ak si chcete, predtým než sa do nich pustíte, rozcvičiť svoje matematické svaly, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravovala Betka Bohiniková*)

Pre ľahšiu orientáciu si označíme jednotlivé štvorčeky písmenami ***a*** až ***l***.



Na začiatok je užitočné všimnúť si nasledujúcich pár vecí:

- 7 vieme získať len vynásobením 7 · 1,
- 50 vieme získať len ako 5 · 10 (keďže k dispozícii máme len čísla od 1 do 12),
- čísla 396 a 1320 sú obe deliteľné 11.

Na základe týchto informácií vieme, že:

- ***d*** = 11, jediné spoločné políčko 396 a 1320,
- ***f*** = 1, pretože 1320 nie je deliteľné 7. Potom ***j*** = 7,
- ***c*** = 10, ak by c = 5 tak e = 24, ale 24 nemáme k dispozícii, takže ***e*** = 12 a ***g*** = 5 (premyslite si prečo).

Zostávajú nám čísla 2, 3, 4, 6, 8, 9. Vieme že ***a*** · ***h*** · ***k*** = 36. Zo zostávajúcich čísel na tento súčin vieme použiť iba ***2*** · ***3*** · ***6.*** Osmičku nevieme použiť, lebo 36 nie je jej násobok a 9 by sme mohli použiť len v kombinácii so 4 a 1, jednotku sme ale už použili.
Potom na miesta ***b***, ***i*** a ***l*** zostávajú čísla 4, 8 a 9. Z trojíc 2, 3, 6 a 4, 8, 9 potrebujeme vybrať dve čísla (z každej trojice jedno) na miesta ***k*** a ***l***, tak aby ***k*** · ***l*** = 12*.* Z čísel ktoré nám zostali to dosiahneme len ako 3 · 4. Zostávajúce čísla 6 a 2 môžeme dať na miesta ***a*** a ***h*** ľubovoľne. Rovnako aj čísla 8 a 9 na miesta ***i*** a ***b***. Dostaneme tak nasledujúce 4 možnosti. A keďže všetky ostatné čísla boli dosadené vynútene, iné možnosti už nie sú.

	6	**8**	
10	11	12	1
5	**2**	**9**	7
	3	4	

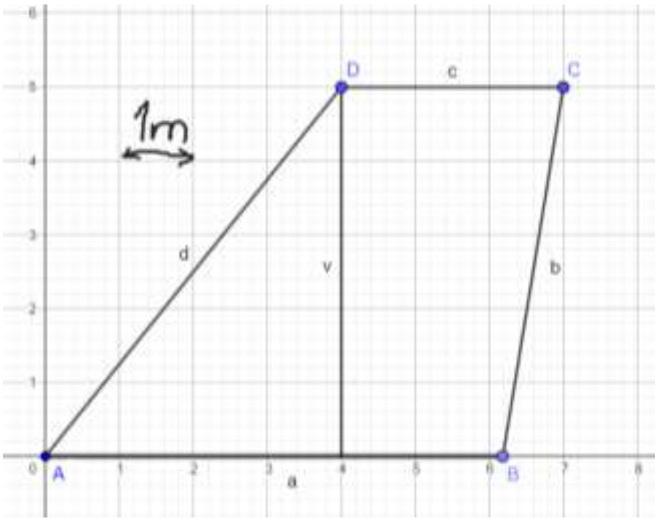
	6	**9**	
10	11	12	1
5	**2**	**8**	7
	3	4	

	2	**8**	
10	11	12	1
5	**6**	**9**	7
	3	4	

	2	**9**	
10	11	12	1
5	**6**	**8**	7
	3	4	

Príklad č. 2 *(opravovala Timea Jakubócyová)*

Táto úloha sa dala riešiť veľa rôznymi peknými spôsobmi, my si ukážeme najčastejší z nich.



Máme lichobežník s obsahom 23 m^2 a poznáme súradnice troch jeho vrcholov (pilierov, ktoré sú umiestnené v jeho vrcholoch). Aby sa nám ľahšie rozmýšľalo, nazvime ich A, C, D a štvrtý vrchol, ktorého súradnice zatiaľ nepoznáme, nazvime B. Súradnice našich vrcholov vyzerajú teda takto: A[0;0], B[x;0], C[7;5], D[4;5]. Chýbajúcu súradnicu vieme nájsť pomocou vzorca na výpočet obsahu lichobežníka, ktorý je $S_{ABCD} = ((\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{v}) : 2$, kde **a** a **c** sú dĺžky základní lichobežníka a **v** je výška lichobežníka. Poďme sa pozrieť, ktoré z týchto hodnôt vieme zistiť.

Zo zadania vieme, že obsah S je 23 m^2. Na to, aby sme našli hodnoty **a** a **c** potrebujeme zistiť, ktoré strany lichobežníka sú jeho základne. Môžeme vidieť, že strana AB je rovnobežná so stranou CD, pretože body A a B majú rovnakú druhú súradnicu, rovnako ako aj body C a D. Tieto dve strany, AB a CD, preto tvoria dve základne lichobežníka. Dĺžku základne AB vieme zistiť tak, že odpočítame prvé súradnice bodov A a B, dostávame $|AB| = \mathbf{x} - 0 = \mathbf{x}$ metrov. Podobne zistíme, že dĺžka základne CD je $|CD| = 7 - 4 = 3$m. Výšku **v** vieme zistiť tak, že si zoberieme jeden bod na jednej základni, napríklad bod C, a jeden bod na druhej základni, napríklad bod A, a odpočítame ich druhé súradnice. Dostaneme $\mathbf{v} = 5 - 0 = 5$m. Teraz už máme všetky potrebné hodnoty, ktoré môžeme dosadiť do vzorca, a tak zistiť neznámu dĺžku základne AB:

$$
\begin{aligned}
S_{ABCD} &= ((\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{v}) : 2 & \\
23 &= ((\mathbf{x} + 3) \cdot 5) : 2 & / \cdot 2 \\
46 &= (\mathbf{x} + 3) \cdot 5 & / :5 \\
9{,}2 &= \mathbf{x} + 3 & / -3 \\
6{,}2 &= \mathbf{x} &
\end{aligned}
$$

Zistili sme, že dĺžka strany AB je rovná $AB = \mathbf{x} - 0 = 6{,}2 - 0 = 6{,}2$m. Takže už vieme zistiť chýbajúcu prvú súradnicu bodu B, a to tak, že pričítame dĺžku strany AB k prvej súradnici bodu A: $0 + \mathbf{x} = 0 + 6{,}2 = 6{,}2$. Bod B (čiže 4. pilier) má súradnice B[6,2;0].

<u>Iné riešenie:</u>

Ešte si môžeme povedať niečo k zvyšným spôsobom, ktorými sa úloha dala riešiť. Tieto spôsoby väčšinou pozostávali z toho, že ste si lichobežník rozdelili na trojuholníky a obdĺžnik. Následne ste vypočítali obsahy týchto jednotlivých útvarov a pomocou nich našli chýbajúcu súradnicu. Tento postup je tiež správny, avšak veľmi často ste zabúdali napísať, ako ste prišli na obsahy týchto jednotlivých útvarov a uviedli ste len výsledne hodnoty. Takto ste mnohí prišli o cenné body.

Príklad č. 3 (*opravovala Anežka Pajunková*)

Našou úlohou je zistiť počet účastníkov lukostreleckého turnaja. Zo zadania vieme, že víťaz turnaja dostal 1/6 z fondu na odmeny. Baška s Dáškou zistili, že do fondu na odmeny idú 2/3 zo všetkých peňazí. Ľahko dopočítame, akú časť zo všetkých vyzbieraných peňazí dostal víťaz. Chceme vypočítať 1/6 z 2/3. (1/6 : 3) · 2 = 1/9. Teda víťaz vyhral 1/9 zo všetkých vyzbieraných peňazí.

Zo zadania ďalej vieme, že Tonko zaplatil viac za účastnícky poplatok ako vyhral. Slovíčko viac nám napovedá, že môžeme vytvoriť nerovnicu. Označme si písmenkom **x** počet účastníkov a písmenkom **y** výšku účastníckeho poplatku. Vieme, že účastnícky poplatok **y** je viac ako 1/9 zo všetkých vyzbieraných peňazí. Všetkých peňazí sa vyzbieralo **x** · **y**, takže **y** > (**x** · **y**) : 9. Keď obe strany vydelíme y a vynásobíme 9, dostaneme 9 > **x**.

Zistili sme, že účastníkov bolo menej ako 9. Ďalej si treba v zadaní všimnúť, že Tonko vyhral viac peňazí ako každý ďalší účastník. Niektorí šikovní z vás, si vytvorili ďalšiu nerovnicu. Iní si túto vetu nevšímali. A ďalších zaujalo to, že ostatní súťažiaci okrem Tonka vyhrali 5/6 z fondu na odmeny.

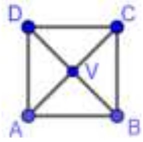
Ak by sa turnaja zúčastnilo presne šesť súťažiacich. Tonko by si zobral svoju 1/6. Ak by si ostatní piati zvyšných 5/6 z fondu odmien rozdelili spravodlivo, tak by všetci vyhrali rovnako 1/6. Ak by si účastníci okrem Tonka nechceli výhru rozdeliť spravodlivo, určite by niekto z nich vyhral dokonca viac peňazí ako Tonko. Teraz sa pozrime, čo sa stane ak bude účastníkov menej ako šesť. Keby si zvyšný súťažiaci okrem Tonka výhru rozdelili spravodlivo, každý z nich by mal väčšiu výhru ako Tonko. (A ak nespravodlivo, tak by mal aspoň jeden z nich výhru väčšiu než Tonko.) Vieme, že Tonko vyhral viac ako každý ďalší účastní, takže účastníkov bolo viac ako 6. Zároveň už vieme, že ich bolo menej ako 9, takže účastníkov lukostreleckého turnaja mohlo byť buď 7 alebo 8.

Príklad č. 4 *(opravovala Števka Glevitzká)*

Štvorboký ihlan pozostáva zo štyroch 3-uholníkových stien a jednej 4-uholníkovej steny (podstava). Preto čísla 7, 8, 9 a 10 na stenách dostal Drakula tak, že sčítal tri alebo štyri rôzne čísla spomedzi čísel 1 až 5. Určite nebude na škodu poznať všetky možnosti, ako to mohol spraviť. Skúste si ich teda nájsť. Malo by vám vyjsť nasledovné:

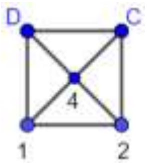
$$7 = 1 + 2 + 4$$
$$8 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4$$
$$9 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$$
$$10 = 1 + 4 + 5 = 2 + 3 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4$$

Môžeme si všimnúť, že jedine číslo 10 by mohlo byť napísané na podstave. Poďme teda preskúmať túto možnosť. Na ihlan postavený na podstave sa však nebudeme pozerať zboku ako zvyčajne, ale pozrieme sa naň zvrchu, aby sme videli všetky vrcholy naraz. Uvidíme teda niečo ako na obrázku nižšie. Vrchol V je vtedy ten oproti podstave. Keď je číslo 10 na podstave, tak vo vrcholoch A, B, C a D musia byť v nejakom poradí čísla 1, 2, 3

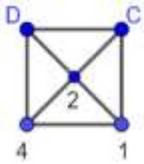


a 4 (inak 10 nedostaneme). Potom pre vrchol V zostalo jedine číslo 5. Vrchol V je navyše spoločný pre všetky 3-uholníkové steny, čiže číslo 5 by malo byť v súčte čísla na každej z týchto stien. No keď sa pozrieme vyššie na vypísané súčty, zistíme, že číslo 7 sa dá zapísať jediným spôsobom, avšak číslo 5 sa v ňom nenachádza. To nám nevychádza, a teda na podstave nemôže byť napísané číslo 10.

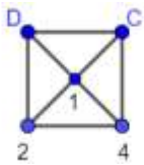
Z toho vieme, že chýbajúci súčet je na podstave a tie, čo poznáme, sú na 3-uholníkových stenách. Ako sme už aj vyššie spomenuli, pre číslo 7 máme len jeden možný súčet. Máme teda tri možnosti, ako mohli byť sčítance na ihlane uložené (ak nerátame také, ktoré z nich dostaneme len otočením alebo zrkadlením):



(a)



(b)



(c)

Prejdime si tieto tri možnosti pekne systematicky:

(a) Číslo 4 je spoločné pre všetky 3-uholníkové steny, preto pripadajú do úvahy len súčty

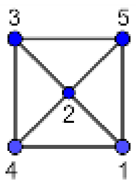
$7 = 1 + 2 + 4$, $8 = 1 + 3 + 4$, $9 = 2 + 3 + 4$, $10 = 1 + 4 + 5$.

Keď sa pozrieme na obrázok, zistíme, že každé číslo prislúchajúce vrcholom A, B, C a D vystupuje práve v dvoch súčtoch (lebo každý je okrem podstavy pri ďalších dvoch stenách). Avšak číslo 1 je až v troch z nich (a číslo 5 len v jednom), teda tento prípad nemá riešenie. (K rovnakému výsledku by ste prišli aj keby sa pozriete na všetky možnosti, ako doplniť čísla na vrcholy C a D.)

(b) Všetky 3-uholníkové steny majú spoločné číslo 2, takže do úvahy pripadajú súčty

$7 = 1 + 2 + 4$ $8 = 1 + 2 + 5$ $9 = 2 + 3 + 4$ $10 = 2 + 3 + 5$

Ďalej sa dá postupovať rôzne. Môžeme si vyskúšať, čo sa deje v oboch možnostiach, keď dopíšeme čísla 3 a 5. Alebo napríklad si môžeme všimnúť, že 1 a 2 sú spolu v súčte len pri 7 a 8, preto musia susediť, a tak číslo 1 musí susediť aj s číslom 5. Každým spôsobom by ste ale mali dospieť k riešeniu nakreslenom na obrázku. Vtedy na podstave chýba súčet 13.



(c) Prípad, že 3-uhloníkové steny majú spoločné číslo 1, vyjde podobne ako prípad a). Skúste si ho spraviť sami (môžete použiť rovnaké myšlienky).

Systematickým hľadaním vyhovujúcich možností sme zistili, že ak nehľadíme na otočenia alebo zrkadlenia, tak čísla mohli byť rozmiestnené iba tak ako na poslednom obrázku. Vtedy chýba na podstave súčet 13.

<u>Iné riešenie:</u>

Keď už vieme, že chýbajúci súčet je na podstave a všetky známe súčty majú jedného spoločného sčítaca, môžeme sa na úlohu pozrieť aj inak. Sčítajme čísla na 3-uholníkových stenách. Ďalej si všimnime, že vo výslednom súčte máme započítaný vrchol V *štyrikrát a zvyšné vrcholy práve dvakrát. Z toho dostaneme* $2(A + B + C + D) + 4V =$ $= 7 + 8 + 9 + 10$. *To si môžeme upraviť na* $2(A + B + C + D + V) + 2V = 34$. *Avšak súčet* $A + B + C + D + V$ *poznáme, pretože je to súčet čísel od 1 po 5, čo je 15. Teda* $2 \cdot 15 + 2V = 34$, *z čoho už ľahko dorátame, že* $V = 2$. *Ďalej už len správne umiestnime zvyšné čísla, obdobne ako v časti* (b).