SEZAMKO 2020/2021, Vzorové riešenia 1. série letnej časti

Milí riešitelia,
opäť nám prišla kopa zaujímavých riešení. Amandu a Erika vaša pomoc veľmi potešila. Netreba však nič nechať na náhodu a treba naďalej trénovať svoje matematické svaly. K tomu vám isto dopomôžu tieto vzorové riešenia, hlavne ak si ich poriadne prečítate.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Hlavičku píšte na vrch stránky, riešenia si zoraďujeme podľa abecedy
Nezabudnite, že všetko o SEZAMKOVI nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Veľa úspechov v druhej sérii vám za organizátorov SEZAMKA želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Maťka Gaňová)

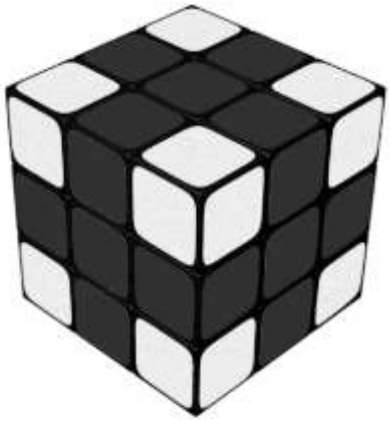
Najskôr zistíme, z koľkých malých kociek sa väčšia kocka skladá. Väčšia kocka má 3 vrstvy a každá vrstva sa skladá z 9 malých kociek. Dokopy sa teda väčšia kocka skladá z 27 malých kociek.

Teraz musíme spočítať, farbu koľkých malých kociek poznáme. Z obrázku je jasné, že minimálne 12 malých kociek je určite čiernych a bielych je minimálne 7 (pozrite sa pozorne!). Keďže spolu vidíme 12 + 7 = 19 malých kociek, nepoznáme farbu ostatných 27 – 19 = 8 malých kociek.

Ak chceme pri stavbe kocky použiť, čo najmenej malých čiernych kociek, tak všetky kocky, ktoré nevidíme musia byť biele, aby bol počet malých čiernych kociek najmenší možný. Najmenej teda môžeme použiť 12 malých čiernych kociek, presne tie, ktoré už vidíme na obrázku väčšej kocky.

Ak chceme pri stavbe kocky použiť, čo najviac malých čiernych kociek, tak všetky kocky, ktoré nevidíme musia byť čierne, aby bol počet malých čiernych kociek najväčší možný. Na obrázku vidíme 12 čiernych kociek a už sme vypočítali, že nevidíme 8 kociek, ktoré tiež musia byť čierne. Najviac preto môžeme použiť 12 + 8 = 20 malých čiernych kociek.

Najmenej mohli použiť 12 a najviac 20 malých čiernych kociek.



***Príklad č. 2** (opravoval Maťo Sopóci)*

Zo zadania vieme, že Nanukove výroky musia byť vždy pravdivé a Sorbetove vždy nepravdivé. Najskôr zistíme, kto prvý začal hovoriť. Bol to Sorbet alebo Nanuk? Rozdeľme si odpovede na dva prípady, podľa toho kto hovoril prvý.

(Prípad 1)

Sorbet: Toto číslo je násobkom čísla 5.
Nanuk: Je dvojciferné.
Sorbet: Je párne.
Nanuk: Súčet cifier tohto čísla je 7.
Sorbet: Je jednociferné.

Nanuk hovorí pravdu, teda hľadáme čísla, ktoré sú dvojciferné a majú ciferný súčet 7. Teda: **16, 61, 25, 52, 34, 43, 70.** Nesmieme zabudnúť na to, že všetky Sorbetove výroky musia byť nepravdivé. Treba preto vylúčiť čísla, ktoré sú násobkom čísla 5. Odstránime teda 25 a 70. Zostali nám: **16, 34, 43, 52, 61**. Na základe druhého Sorbetoveho tvrdenia treba vylúčiť párne čísla. Ostali teda čísla: **43** a **61.** Posledné Sorbetove tvrdenie už nepravdivé je, pretože vďaka Nanukovému tvrdeniu nás zaujímajú iba dvojciferné čísla.

(Prípad 2)

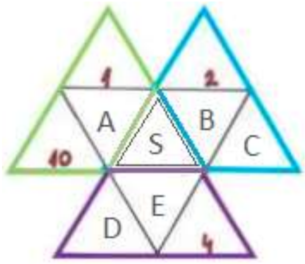
Nanuk: Toto číslo je násobkom čísla 5.
Sorbet: Je dvojciferné.
Nanuk: Je párne.
Sorbet: Súčet cifier tohto čísla je 7.
Nanuk: Je jednociferné.

Na základe Sorbetových tvrdení, ktoré musia byť nepravdivé, vieme, že sa jedná buď o jednociferné čísla alebo troj- a viacciferné čísla. Rovnako súčet cifier nemôže byť 7. Teda čísla 7, 115 atď. nie sú vyhovujúce napriek tomu, že vyhovujú Sorbetovmu prvému tvrdeniu. Teraz sa sústreďme na tvrdenia Nanuka, ktoré musia byť pravda. Posledné tvrdenie nám hneď hovorí, že sa jedná len o jednociferné čísla. Teda možné čísla sú nasledovné: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.** Prostredné tvrdenie vraví, že číslo musí byť párne. Ostali nám teda: **0, 2, 4, 6, 8.** Tvrdenie, ktoré sme zatiaľ nesplnil, je to, že číslo musí byť násobkom čísla 5. Jediné jednociferné čísla ktoré spĺňajú podmienku sú 0 a 5. Z toho nám je jasné, že jediné možné riešenie, ak by Nanuk vravel ako prvý, by mohla byť bola **0**. (To môže ale byť v rozpore s tým, že zjedli niekoľko rýb. Ale mohol to povedať Sorbet...) Či ste 0 mali alebo nemali ako riešenie sme preto nebrali do úvahy. Ak ste na neho mysleli super práca ☺.

Sorbet a Nanuk spolu zjedli (0,) 43 alebo 61 rýb.

Príklad č. 3 (opravovala Ajka Kucharíková)

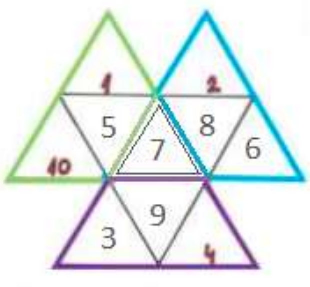
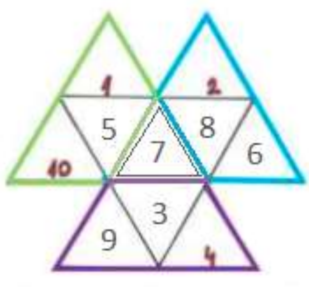
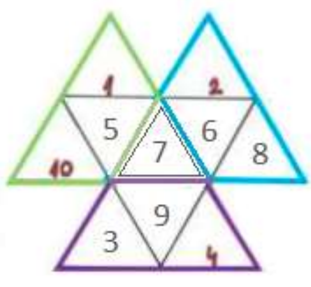
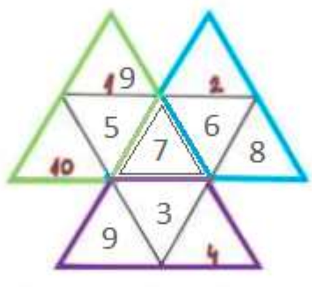
Máme doplniť čísla od 1 do 10 tak, aby súčet čísel v troch veľkých trojuholníkoch bol rovnaký. Niektoré čísla sú už doplnené, ostali nám ešte čísla 3, 5, 6, 7, 8 a 9. Mohli by sme doplnenie čísel iba rôzne skúšať. Ale úloha je nájsť všetky možnosti, takže by sme si museli nájsť spôsob, ako vyskúšať všetky a žiadne nezabudnúť. Dá sa to aj tak, ale trvalo by to dosť dlho. Preto to skúsime inak.



Vieme, že súčet čísel vo veľkých farebných trojuholníkoch má byť rovnaký. Vo všetkých súčtoch veľkých trojuholníkov je započítaný prostredný trojuholník ***S***. Preto trojuholník ***S*** môžeme z každého veľkého trojuholníka odobrať a zostanú nám tri farebné útvary zložené z troch malých trojuholníkov (tak ako na obrázku hore), ktoré majú zase rovnaký súčet. Vieme vymyslieť aký bude tento súčet? Kebyže spočítame všetky čísla v celom útvare, teda všetky čísla od 1 do 10, tak dostaneme 1 + 2 + 3 + … + 9 + 10 = 55. Tu máme ale započítané aj prostredné číslo ***S***. Keď ho odčítame od 55, tak dostaneme súčet čísel v troch farebných útvaroch. Po vydelení tromi dostaneme súčet čísel v jednom farebnom útvare. Ak by bolo v strede napríklad ***S = 3*** (budeme skúšať len čísla, ktoré ešte nie sú použité), tak potom ***55 – 3 = 52*** by mal byť súčet čísel v troch farebných útvaroch. A keďže majú mať rovnaké súčty, tak súčet v každom z nich je ***52 : 3 = 17,33***… . To ale nevieme spraviť. Vyskúšajme dosadiť ostatné čísla za ***S***:

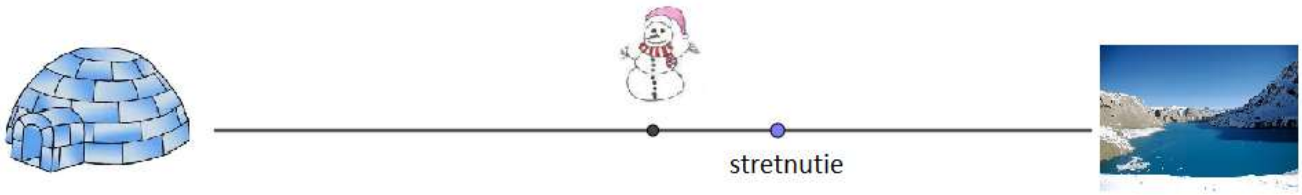
Ak S = 5, tak 55 – 5 = 50 a 50 : 3 = 16,66…	Čo nemôže byť.
Ak S = 6, tak 55 – 6 = 49 a 49 : 3 = 16,33…	Čo nemôže byť.
Ak S = 7, tak 55 – 7 = 48 a 48 : 3 = **16**.	**Čo môže byť.**
Ak S = 8, tak 55 – 8 = 47 a 47 : 3 = 15,66…	Čo nemôže byť.
Ak S = 9, tak 55 – 9 = 46 a 46 : 3 = 15,33…	Čo nemôže byť.

Takže do stredu dáme ***S = 7*** a skúsime doplniť ostatné čísla, tak aby súčet v útvaroch bol 16. V zelenom útvare vieme, že ***1 + 10 + A = 16***, takže ***A = 5***. Pre písmená ***B, C, D a E*** nám ostali už len čísla 3, 6, 8, 9. V modrom útvare vieme, že ***2 + B + C = 16***, takže ***B + C = 14***. To vieme urobiť iba ako 6 + 8 alebo ako 8 + 6. Je jedno, či bude ***B=8*** a ***C=6*** alebo naopak. Vo fialovom útvare vieme, že ***D + E + 4 = 16***, takže ***D + E = 12***. To vieme urobiť iba ako 3 + 9 alebo 9 + 3. Keď skombinujeme všetky možnosti ako vymeniť B, C a E, D, tak dostaneme štyri rôzne riešenia. Iné riešenie už nebude existovať, ako sme si ukázali skorej.

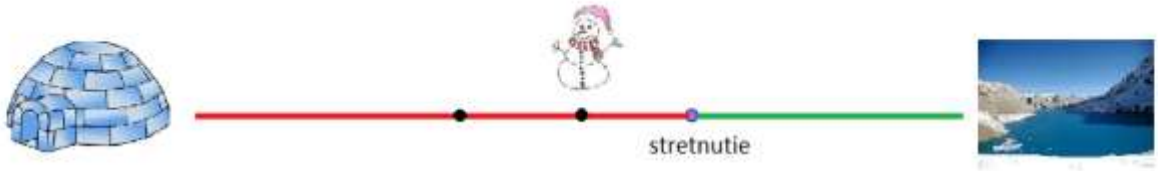
***Príklad č. 4** (opravovala Maťa Kudelčíková)*

Táto úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi, my si ukážeme jeden z nich. Na začiatok si nakreslíme obrázok a vyznačíme v ňom všetky dôležité miesta (snehuliak je v strede cesty):



Zo zadania vieme, že úsek cesty snehuliak – stretnutie prešla Amanda za 15 minút. Erik prešiel od miesta stretnutia ku snehuliakovi za 30 minút. To znamená, že Amanda prešla tento úsek 2-krát rýchlejšie ako Erik. Na celej ceste je preto Amanda na bežkách dva krát rýchlejšia ako Erik.

Keďže ide Amanda 2-krát rýchlejšie ako Erik a vyštartovali naraz, za rovnaký čas prejde 2-krát väčšiu vzdialenosť ako Erik. Inak povedané, zatiaľ čo Erik prejde 1 úsek cesty, Amanda prejde 2 takéto úseky. Preto rozdelíme celú cestu na tretiny - keďže obaja vyrážajú zo svojich miest naraz, tak za rovnaký čas Amanda prejde 2/3 cesty a Erik prejde zvyšnú 1/3 cesty.



Erik teda prešiel 1/3 cesty, kým stretol Amandu. Pokračoval 30 minút v ceste, kedy prešiel x cesty a prišiel ku snehuliakovi, čiže do 1/2 cesty. To znamená, že táto polovica cesty je zložená z 1 /3 cesty plus x cesty:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + x$$

Z toho vieme vypočítať, koľko je x:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

Takže Erik prešiel 1/6 cesty za 30 minút. Celá cesta sa skladá zo 6 takýchto úsekov. Erikovi preto celá cesta trvala $6 \cdot 30 = 180$ minút. Keďže Amande táto 1/6 cesty trvala 15 minút, celá cesta jej trvala $6 \cdot 15 = 90$ minút (čo je naozaj 2-krát menej, ako Erikovi).

Amande cesta trvala 90 minút a Erikovi 180 minút.