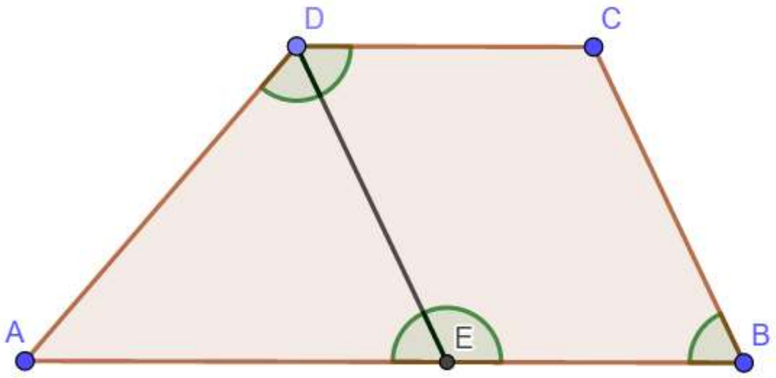
SEZAM, školský rok 2020/21, vzorové riešenia 2. letnej série

Milí riešitelia,
do rúk sa k vám práve dostali zadania tretej, a teda poslednej letnej série tohtoročného SEZAMu. Tonko, Miško, Dáška a Baška sa veľmi potešili všetkým vaším riešeniam. Zároveň na vás čaká záverečná sada úloh, s ktorými potrebujú pomôcť. Využite poslednú možnosť zabojovať o čo najlepšie umiestnenie vo finálnom poradí. Tí najúspešnejší z vás sa môžu tešiť na letný tábor, ktorý (všetci veríme, že) sa bude konať v dňoch 30. júla až 8. augusta. Pred tým než sa pustíte do riešenia úloh, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, určite vám to pomôže.
Nakoniec vás ešte chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravovala Ivka Hrivová*)

Našou úlohou je zistiť veľkosť základne AB. Vieme, že uhol CDA je dvakrát taký veľký, ako uhol ABC, teda ak |∠ABC|=x, tak platí |∠CDA| = 2x. Veďme teraz bodom D os uhla CDA.



Táto os pretne základňu AB v bode E. Keďže os uhla rozdeľuje uhol presne na polovicu, tak platí |∠CDE| = |∠EDA| = x. V štvoruholníku EBCD sú dva a dva uhly oproti sebe rovnako veľké, a teda tento útvar je kosodĺžnik. Z tejto informácie tiež vyplýva, že |EB| = |CD| = 3 cm. Keďže súčet všetkých uhlov v kosodĺžniku je 360° a protiľahlé uhly musia byť zhodné, tak uhly DEB a BCD sú zhodné a rovné 180° – x.

Keďže DEB a AED sú susedné uhly, tak |∠DEB| + |∠AED| = 180°. Veľkosť uhla DEB je 180° – x, takže |∠AED| = 180° – |∠DEB| = 180° – (180° – x) = x. Uhly pri D a E v trojuholníku AED sú teda zhodné, takže sa jedná o rovnoramenný trojuholník so základňou DE. Z toho vieme, že |AD| = |AE| = 5cm. Dĺžka strany AB je teda |AE| + |EB| = 5 + 3 = 8 cm.

Príklad č. 2 (*opravoval Adam Kňaze*)

Vedúca mala pri rozdeľovaní turistov do skupín niekoľko možností ako to spraviť, tu si ukážeme jednu z nich. Počet turistov je vždy násobok trojky. Rozumný spôsob ako začať je pozrieť sa najprv na malé násobky, skúsiť ich rozdeliť do troch skupín podľa zadania a pri troche šťastia si pri tom všimneme nejaký univerzálny spôsob, ktorý bude fungovať na akýkoľvek násobok.

Keď začneme najmenším násobkom, teda trojkou, veľmi rýchlo zistíme, že takýto počet turistov do troch skupín s rovnakými súčtami nerozdelíme. Každý z turistov má na lístočku iné číslo a každý musí byť sám v inej skupine.

Poďme teda na ďalší násobok - šestku. Nie je to veľa čísel, takže rýchlo nájdeme spôsob ako turistov do troch skupín rozdeliť - stačí spojiť najväčšie číslo s najmenším, druhé najväčšie s druhým najmenším a napokon zvyšné dve čísla, teda [1,6], [2,5] a [3,4]. Keď takto zaradom tvoríme dvojice, pri každej ďalšej dvojici sa jedno z čísel zväčší o jedna a druhé zmenší o jedna, súčet teda ostatne rovnaký.

Tento spôsob vyzerá aj celkom univerzálne a mohol by fungovať na viac násobkov, ako len šestku. Musí však platiť jedna podmienka: počet turistov musí byť párny, aby nám po popárovaní čísel neostalo žiadne nazvyš. Podľa zadania je zároveň počet turistov deliteľný tromi, čiže následne vieme dvojice, ktoré sme vytvorili rozdeliť do troch skupín tak, že v každej skupine ich bude rovnako veľa. Keďže všetky dvojice majú rovnaký súčet a v každej skupine ich bude rovnako veľa, tak aj súčty troch skupín budú rovnaké. Vyriešili sme tak všetky párne násobky trojky, teda 6, 12, 18, 24…

Ostávajú nám ešte nepárne násobky trojky, na ktoré naša predchádzajúca taktika nebude fungovať. Netreba to však vzdať, nájdeme nejakú inú. Ďalší násobok trojky je deviatka. Stále to nie je príliš veľa čísel, môžeme teda skúsiť nájsť nejaké rozdelenie. V tomto prípade ich existuje viacero, toto je jedno z nich: [1, 5, 9], [2, 6, 7] a [3, 4, 8]. Žiaden pekný systém tam nevidím, poďme teda na ďalší nepárny násobok. Tým je 15 turistov, teda o 6 viac. Nezabúdajme, že prvých 9 turistov už vieme rozdeliť na tri skupiny s rovnakými súčtami.

Efektívne by bolo, keby sa títo ďalší šiesti prišelci vedeli rozdeliť sami na tri skupiny, ktoré len pridáme k tým pôvodným (nech ich nemusíme zase všetkých miešať, to by bola otrava). Prišelcov je šesť, čo je počet, ktorý sme riešili pred chvíľou a máme naň vymyslenú funkčnú taktiku. Zase nám stačí dať dokopy najväčšie číslo s najmenším, druhé najväčšie s druhým najmenším, atď. Dostaneme tri dvojice s rovnakými súčtami, pridáme každú do jednej z troch skupín, ktoré sme už mali vytvorené, a máme vybavené.

No a takto sme vlastne vymysleli aj taktiku na všetky nepárne násobky trojky. Vždy ich totiž vieme rozdeliť na prvú deviaticu (na tú použijeme rozdelenie z vyššia) a nejaký počet šestíc (tie vždy rozdelíme na dvojice s rovnakými súčtami a pridáme k predchádzajúcim turistom). Viď:

$$15 = 9 + 6,\ 21 = 9 + 6 + 6,\ 27 = 9 + 6 + 6 + 6\ldots$$

Našli sme teda dva spôsoby ako rozdeliť turistov do troch skupín podľa zadania, jeden funguje na párne násobky druhý na nepárne, dokopy je teda možné okrem trojky rozdeliť akýkoľvek násobok trojky.

Príklad č. 3 (opravovala Kika Kovalčíková)

Väčšina z vás najprv vyskúšala, či by nestačilo jedno balenie farby – akú stranu by mala štvorcová strecha, ak by na jej natretie stačila len jedna plechovka? Vieme, že 12! = 479 001 600, a po odmocnení strana strechy vychádza 21 886,105… Toto nie je celé číslo, a má viac desatinných čísel, ako sa zmestí na akýkoľvek displej kalkulačky.

Poďme sa pozrieť na to, prečo 12! nie je plocha štvorcovej strechy. Na to, aby nejaké číslo **y** mohlo byť plocha štvorcovej strechy, musí sa dať napísať ako súčin iného celého čísla **y** so samým sebou, teda **y** = **x** · **x**. Tak sa poďme pozrieť, či sa 12! dá napísať ako súčin takýchto dvoch čísel. Na to si ho najprv rozdelíme na súčin prvočísel:

$$\begin{aligned} 12! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) \end{aligned}$$

Skontrolujme, či sa v tomto zápise dajú čísla preusporiadať tak, aby sme ich vedeli rozdeliť na dve rovnaké časti:

$$12! = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

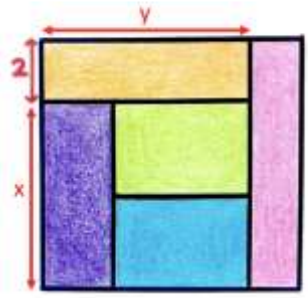
Dvojok je párny počet, teda vieme polovicu z nich započítať do jednej strany štvorca, a polovicu do druhej strany štvorca. Podobne päťky vieme rozdeliť na dve rovnaké časti. Horšie to bude s trojkami, sedmičkou a jedenástkou. Niektoré trojky vieme rozdeliť, ale tá posledná zostane bez dvojice. Podobne bez dvojice nám zostali čísla sedem a jedenásť. Čím treba vynásobiť číslo 12!, aby bol výsledok plocha štvorcovej strechy? Musíme týmto osamoteným číslam 3, 7 a 11 doplniť chýbajúci pár:

$$12! \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11$$

Jedna strana štvorcovej strechy teda bude mať dĺžku $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ mm, a najmenší počet balení farby, ktoré treba kúpiť, je 3 · 7 · 11 = 231.

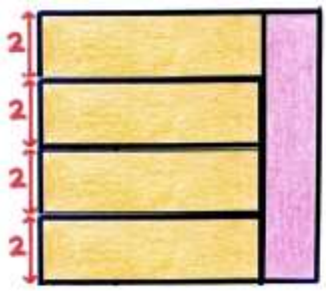
Príklad č. 4 (opravovala Iva Jančigová)

Tento príklad sa dal riešiť veľa rôznymi spôsobmi. Napríklad takto:



Začneme tým, že si označíme výšku fialového obdĺžnika **x** a šírku oranžového obdĺžnika **y**. Vieme, že obsah (plocha) oranžového obdĺžnika je $S_o = 2\mathbf{y}$.

Všetky vyfarbené obdĺžniky majú rovnaký obsah, takže veľký obdĺžnik tvorený zeleným, modrým a fialovým obdĺžnikom má obsah $S_v = 3 \cdot S_o = 3 \cdot 2\mathbf{y} = 6\mathbf{y}$. Jeho obsah môžeme tiež vypočítať ako $S_v = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Tieto dva výpočty obsahu musia dávať rovnaký výsledok, preto môžeme dať do rovnosti $6\mathbf{y} = S_v = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ a z toho dostávame, že **x** = 6m. Tým pádom strana celého štvorcového parku je 2m + 6m = 8m a rozloha celého parku je 8m · 8m = 64m^2.



Iné riešenie:

K rovnakej odpovedi môžeme prísť aj tak, že namiesto zeleného, modrého a fialového obdĺžnika si nakreslíme pod seba tri oranžové, o ktorých vieme, že majú rovnaký obsah. Nemusíme vedieť, koľko ten obsah je, ale vieme, že sa tam budú zmestiť presne tri, pretože oranžový obdĺžnik má rovnakú stranu, ako sú šírka fialového a zeleného spolu. Potom vieme, že strana celého parku je 4 · 2m = 8m a teda jeho celková rozloha 8m · 8m = 64m^2.