JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU

SEZAM, školský rok 2020/21, vzorové riešenia 3. letnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou končí aj celá letná časť SEZAMu. Cestovatelia Miško, Dáška a Baška vám z cieľovej stanice všetkým ďakujú za celoročnú pomoc pri riešení ich problémov a prajú pekné a pohodové leto. Tých najšikovnejších z vás navyše čaká letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 30. júla až 8. augusta na Hutách. Pred tým, než sa pustíte do vypĺňania návratky, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia.
Pozorne sledujte stránku www.sezam.sk, kde budeme informovať o všetkom dôležitom ohľadom súťaže a tábora.

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 *(opravovali Kika Kovalčíková a Majo Kurčina)*

Ukážeme si dva spôsoby, ako sa tento príklad dal riešiť. V každom prípade najprv bolo treba zistiť, z koľkých zápaliek sa skladajú jednotlivé schodiská. Prvé sa skladá z 5 zápaliek: 1 je na streche a 4 sú po stranách. Každé ďalšie schodisko vieme z predošlého vyrobiť tak, že pridáme na spodok z oboch strán po dve zápalky. Preto má každé ďalšie schodisko o 4 zápalky viac ako predošlé.

<u>Prvý spôsob riešenia:</u>

Najjednoduchší spôsob, ako príklad vyriešiť, je postupne od 2021 odčítavať počty zápaliek za jednotlivé schodiská: 2021 – 5 – 9 – 13 – 17 – 21 – atď. Toto by sme robili dovtedy, kým by sme nenarazili na záporné číslo. Počet odčítaných čísel by bol počet postavaných schodísk.

<u>Druhý spôsob riešenia:</u>

Označme si **n** ako počet schodísk, ktoré sa nám podarilo postaviť celé, a poďme zistiť, koľko zápaliek sme na to minuli. Využijeme pri tom fakt, že každé schodisko je o 4 zápalky väčšie ako to predošlé:

$$(1 + 4\cdot1) + (1 + 4\cdot2) + (1 + 4\cdot3) + (1 + 4\cdot4) + (1 + 4\cdot5) + (1 + 4\cdot6) + \ldots + (1 + 4\cdot\mathbf{n}) \le 2021$$

Počet zátvoriek je **n**, teda aj súčet jednotiek na začiatku zátvoriek je **n**. Potom vyjmeme číslo 4, ktoré sa nachádza v každej zátvorke:

$$\mathbf{n} + (4\cdot1) + (4\cdot2) + (4\cdot3) + (4\cdot4) + (4\cdot5) + (4\cdot6) + \ldots + (4\cdot\mathbf{n}) = \mathbf{n} + 4\cdot(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + \mathbf{n}) \le 2021$$

Ako zistíme súčet čísel od 1 do **n**? Zoberme si túto postupnosť, potom si ju zoberme ešte raz v opačnom poradí, a sčítajme ich navzájom:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (\mathbf{n}-2) & + & (\mathbf{n}-1) & + & \mathbf{n} \\
\mathbf{n} & + & (\mathbf{n}-1) & + & (\mathbf{n}-2) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
(\mathbf{n}+1) & + & (\mathbf{n}+1) & + & (\mathbf{n}+1) & + & \ldots & + & (\mathbf{n}+1) & + & (\mathbf{n}+1) & + & (\mathbf{n}+1)
\end{array}$$

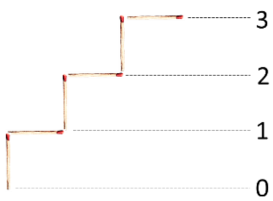
Vo výsledku máme n sčítancov, teda $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n} + 1)$. Toto ešte treba vydeliť dvomi, lebo postupnosť od 1 do **n** sme zobrali dva krát. Takže $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + \mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{n} + 1) / 2$. Dosaďme si to do nerovnice, ktorú máme vyššie a upravme ju na jednoduchší tvar:

$$\mathbf{n} + 4\cdot(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + \mathbf{n}) = \mathbf{n} + 4\cdot\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n} + 1) / 2 \le 2021$$
$$2\mathbf{n}^2 + 3\mathbf{n} \le 2021$$

Vznikla nám kvadratická nerovnica, ktorú ste sa možno v škole ešte neučili počítať, ale to nás hádam nezastaví 😊 Hľadáme najväčšie prirodzené číslo **n**, ktoré by do nej sedelo. Člen $2\mathbf{n}^2$ bude väčší ako $3\mathbf{n}$, preto $3\mathbf{n}$ môžeme zanedbať a nerovnicu si zjednodušíme:

$$2\mathbf{n}^2 \le 2021$$
$$\mathbf{n} \le 31{,}788$$

Naše hľadané číslo **n** bude menšie alebo rovné ako 31. Môžeme si ho dosadiť do pôvodnej nerovnice $2\mathbf{n}^2 + 3\mathbf{n} \le 2021$. Ak bude sedieť, tak sme našli naše číslo **n**, a ak nebude sedieť, treba vyskúšať menšie čísla, teda 30 alebo menej. Po dosadení nám vyjde $2\cdot31^2 + 3\cdot31 = 2015$. Podarí sa nám postaviť 31 celých schodísk, minieme na to 2015 zápaliek, a ešte nám zostane 6 zápaliek na začatie 32-hého schodiska. A na ktorej úrovni bude hlavička poslednej zápalky? To už si vieme aj nakresliť:



Dokopy sa nám podarí postaviť 31 celých schodísk, a v nedokončenom 32-hom schodisku bude posledná zápalka na úrovni 3.

Príklad č. 2 (opravovala Ivka Hrivová)

Pozrime sa najskôr na počet gulí v našej kocke. Guľa je v každom vrchole, tých je 8, v strede každej hrany a hrán je 12, v strede každej steny, tých je 6, a jedna guľa je ešte v strede samotnej kocky. Preto počet všetkých gulí v kocke je 8 + 12 + 6 + 1 = 27.

Našou ďalšou úlohou je zistiť, koľko trojíc gúľ v kocke leží na jednej priamke. Popíšme si najskôr, ako všetky tieto trojice vyzerajú, a následne zrátame koľko ich v kocke máme. Rozdeľme si gule na 4 typy podľa toho, kde sa nachádzajú – hranové (v strede hrany), vrcholové (vo vrchole), stenové (v strede steny) a strednú (v strede kocky). Dôležitým pozorovaním v tejto úlohe je to, že vyhovujúce trojice gúľ majú vždy začiatočnú a koncovú guľu rovnakého typu a strednú iného (keď si prejdete všetky možnosti, v ktorých to tak nie je a nakreslíte si pre každú túto možnosť jednu takú trojicu, nikdy nebude ležať na jednej priamke, a keďže kocka je vysoko symetrický objekt, keď na jednej priamke neleží jedna trojica gúľ konkrétnych typov, nebude na nej ležať žiadna taká trojica).

Prejdime preto všetky možnosti, ako daná trojica gúľ môže vyzerať a pre každú z týchto možností zrátame, koľko týchto konkrétnych trojíc gúľ ležiacich na jednej priamke v kocke máme:

1. **Krajné sú hranové, v strede vrcholová** – žiadna takáto trojica neleží na priamke – **0 možností**
2. **Krajné sú hranové, v strede stenová** – v jednej stene máme takéto trojice 2, žiadna z týchto trojíc neleží v dvoch stenách naraz a preto ich počet bude 2 · (počet stien) = 2 · 6 = **12 možností**
3. **Krajné sú hranové a v strede je stredná guľa** – je ich toľko ako je dvojíc hrán stredovo súmerných podľa stredu kocky, teda 12 : 2 = **6 možností**
4. **Krajné sú vrcholové, v strede je stredná guľa** – ide o telesové uhlopriečky a tie sú **4**
5. **Krajné sú vrcholové, v strede stenová** – v tomto prípade ide o stenové uhlopriečky, v každej stene sú 2 a žiadna uhlopriečka neleží v dvoch stenách naraz, takže máme 6 · 2 = **12 možností**
6. **Krajné sú vrcholové, v strede je hranová** – tieto trojice vždy ležia na niektorej hrane kocky, teda ich počet je celkový počet hrán, čo je **12 možností**
7. **Krajné sú stenové, v strede hranová** – žiadna takáto trojica neleží na jednej priamke – **0 možností**
8. **Krajné sú stenové, v strede vrcholová** – rovnako **0 možností**
9. **Krajné sú stenové, v strede je stredná** – počet možností v tomto prípade je počet dvojíc protiľahlých stien kocky, takže dostávame **3 možnosti**

Stredná kocka je iba jedna, teda na oboch krajoch byť nemôže. Iné trojice neprichádzajú do úvahy a preto celkový počet trojíc gúľ ležiacich na jednej priamke je 12 + 6 + 4 + 12 + 12 + 3 = 49.

Príklad č. 3 *(opravoval Jožo Rajník)*

Na začiatku sa pozrieme na druhú úlohu, nakoľko tá bola jednoduchšia. Tu nám stačí vyskúšať si niekoľko spôsobov, ako sa dali kamienky meniť. Ak Dáška odovzdá panej postupne po jednom kamienku s každej farby, tak dostane z každej farby po tri kamienky. A to je nepárny počet.

	červené	žlté	modré	zelené
Na začiatku	**1**	1	1	1
Po 1. výmene	0	**2**	2	2
Po 2. výmene	1	1	**3**	3
Po 3. výmene	2	2	2	**4**
Po 4. výmene	3	3	3	3

Zodpovedať na prvú otázku bolo náročnejšie. Mnohí z vás prišli na to, že túto úlohu Dáška nevie splniť. Tu nám však nestačí iba skúšať. Ukážeme si dva spôsoby, ako sa prvá úloha dala vysvetliť. Oba spôsoby boli zastúpené v približne rovnakom počte, no nie každý ste mali svoj spôsob rovnako dobre vysvetlený.

Prvý spôsob riešenia:

Každou výmenou odovzdá Dáška jeden kamienok a dostane tri nové. Celkovo jej tak pribudnú dva kamienky. Na začiatku má spolu 4 kamienky, teda ďalšie počty jej kamienkov budú postupne 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, … Aby mala na každej kôpke rovnaký počet kamienkov, tak jej celkový počet kamienkov musí byť deliteľný štyrmi. To sa stane po každej párnej výmene.

Taktiež sa môžeme pozrieť na počty kamienkov jednotlivých farieb. Na začiatku má Dáška z každého kamienku po jednom, čo je nepárny počet. Pri jednej výmene jej pre každú farbu buď pribudne, alebo odbudne jeden kamienok. V oboch prípadoch sa tak zmení počet kamienkov z párneho na nepárny alebo naopak. Teda po prvej výmene bude mať Dáška z každej farby párny počet kamienkov. Po druhej výmene bude mať opäť nepárny počet kamienkov z každej farby. A takto sa to bude striedať. Teda párne počty kamienkov bude mať vždy po každej nepárnej výmene. Tieto naše zistenie nájdete aj v nasledujúcej tabuľke.

	červené	žlté	modré	zelené	spolu
Na začiatku	nepárny	nepárny	nepárny	nepárny	4
Po 1. výmene	párny	párny	párny	párny	6
Po 2. výmene	nepárny	nepárny	nepárny	nepárny	8
Po 3. výmene	párny	párny	párny	párny	10
Po 4. výmene	nepárny	nepárny	nepárny	nepárny	12
Po 5. výmene	párny	párny	párny	párny	14
Po 6. výmene	nepárny	nepárny	nepárny	nepárny	16
...	...	...	...	...	...

To je ale problém. Keď bude mať Dáška z každej farby párny počet kamienkov, tak celkový počet kamienkov nebude deliteľný štyrmi. Preto nemôže mať z každej farby rovnaký počet, ktorý je párny.

Prvý spôsob riešenia:

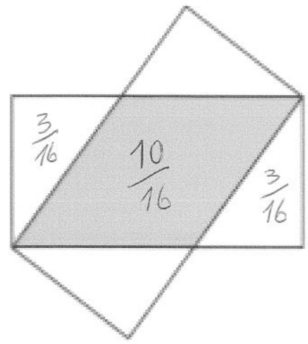
Dáška chce mať z každej farby rovnako veľa kamienkov. Preto nám príde celkom logické, že Dáška musí odovzdať z každej farby rovnaký počet kamienkov. Prečo to ale tak je? Čo ak by odovzdala viac červených ako žltých kamienkov? Zvyšné dve farby, modrá a zelená, nás teraz nezaujímajú. Každá ich výmena nám dá jeden červený a jeden žltý kamienok. Dáška odovzdá celkovo viac červených kamienkov ako žltých. Od pani v stánku dostane naspäť červený kamienok za každý žltý, čo odovzdala. Podobne dostane naspäť žltý kamienok za každý červený, čo odovzdala. To ale znemená, že naspäť dostane menej červených ako žltých kamienkov. Celkovo tak červených viac stratila a menej získala. Preto bude mať po týchto výmenách menej červených kamienkov ako žltých. Táto úvaha platí aj pre zvyšné dvojice farieb. Preto musí Dáška odovzdať z každej farby rovnaký počet kamienkov.

Čo to však znamená? Výsledné počty kamienkov závisia iba od toho, koľko kamienkov Dáška z jednotlivých farieb vymenila. Nezávisia od poradia, v ktorom kamienky vymieňala. Preto si jej výmeny môžeme rozdeliť do niekoľkých sérií. V každej sérii vymení Dáška z každej farby jeden kamienok. Tak pre každú farbu o jeden kamienok príde a tri získa. Celkovo jej po jednej sérii výmen pribudnú dva kamienky z každej farby. Avšak Dáška začína s nepárnym počtom kamienkov z každej farby. Preto nevie pridávaním dvoch kamienkov dostať párne počty kamienkov.

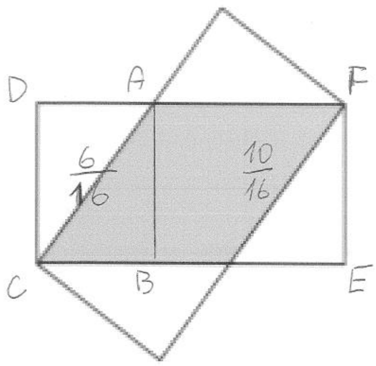
Príklad č. 4 (opravoval Hynek Bachratý)

Keď sme tento príklad vybrali do poslednej série, mali sme trochu obavy, či a ako sa vám ho podarilo zvládnuť. Teraz už vieme, že ste ho takmer všetci vyriešili. A navyše skoro každý iným a originálnym spôsobom. Vzorové riešenie je preto len jedným z možných, snažil som sa vybrať krátke a jednoduché.

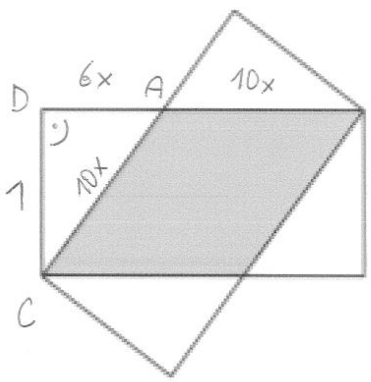
V prvom rade sa zamyslíme nad zadaním. Zo symetrie prekrytia zhodných obdĺžnikových lístkov sa dá usúdiť, že všetky štyri biele trojuholníky sú zhodné. (Dá sa to aj ľahko odôvodniť: určite majú zhodnú stranu zodpovedajúcu kratšej strane obdĺžnika, zhodný pravý uhol a potom ešte zhodné dvojice striedavých alebo vrcholových uhlov. Tí, ktorí toto dokázali poriadne a podrobne, majú pochvalu.) Z toho vyplývajú dve dôležité veci: plocha každého trojuholníka sú ***3/16*** plochy celého obdĺžnika, a šedá prekrytá časť je kosoštvorec s rovankými stranami.



Keď si trojuholníky trochy preusporiadame, vidíme, že obdĺžnik ***ABCD*** má dokopy plochu ***6/16*** a ***ABEF*** ***10/16*** z plochy veľkého obdĺžnika. Preto je aj úsečka ***DF*** bodom ***A*** rozdelená v pomere ***6:10***.



To využijeme pre záverčený výpočet v pravouhlom trojuholníku ***ACD.*** Najskôr si v ňom čo najjedoduchšie označím jeho strany. O kratšej strane obdĺžnika poviem, že má dĺžku ***1***. (To samozrejme nemusí byť pravda, ak by to mal byť napr. 1cm. Ale môžem povedať, že ja mám takú špeciálnu dĺžkovú mieru, že v nej to je 1. Alebo si obrázok zväčšiť tak, aby to naozaj 1cm bol. A ak by som su túto dĺžku označil písmenom, príklad by sa dopočítal veľmi podobne, len trochu zložitejšie.) Pomer ***6:10***, v ktorom je rozdelená dlhšia strana obdĺžnika ***DF***, som zachytil v označení jej častí ***6x*** a ***10x***. (Celá strana je teda ***16x***, a keď budem poznať ***x***, budem poznať aj jej dĺžku.) A keďže prekrytá časť je kosoštvorec, ***10x*** má aj strana ***AC***.



Teraz nám už naozaj stačí Pytagorova veta. Podľa nej $(10x)^2 = (6x)^2 + 1^2$, z toho $100x^2 = 36x^2 + 1$, potom $64x^2 = 1$, $x^2 = 1/64$ a $x = 1/8$. Dlhšia strana obdĺžnikového lístka je preto dlhá $16x = 2$, takže pomer jeho strán je 2:1.