SEZAM, školský rok 2021/22, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí korešpondujúci priatelia, ďakujeme vám za riešenia prvej série a držíme palce do tej druhej. Pri jej rátaní a tiež overení si svojich postupov vám určite pomôže aj preštudovanie týchto vzorových riešení.

Úloha č. 1 (*opravovali Štefánia Glevitzká, Ivana Varsányiová a Gabriela Ježíková****)***

Vieme, že DCBA je najviac 4-ciferné číslo. Vieme, že A, B, C a D sú cifry. DCBA je štvornásobok ABCD, teda **DCBA je deliteľné štvorkou**.

Najväčšie možné ABCD je preto 2498 (aby sa neopakovali cifry a štvornásobok bol stále 4-ciferný). To znamená, že **A musí byť buď 2, 1 alebo 0**.

Ak A = 0, tak D môže byť len 0 alebo 5, lebo číslo D · 4 musí končiť cifrou 0. D nie je 0, pretože cifry sú rôzne. D nie je ani 5, pretože žiadny 4-násobok 3-ciferného čísla ABCD nemá cifru 5 na mieste tisícok. Pretože za D nevieme dosadiť žiadnu cifru, **A sa nemôže rovnať 0**.

A sa nerovná 1, pretože DCBA je 4-násobok ABCD a žiaden násobok štvorky sa nekončí 1.

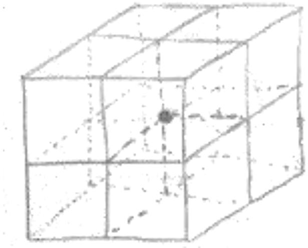
Preto A = 2 . D sa rovná 4 · A + možný presah cez desiatky. Teda D je buď 8 alebo 9. V prípade, že D = 9, končí štvornásobok ABCD práve cifrou 6 (lebo 4 · 9 = 36). Avšak posledná cifra v štvornásobku ABCD má byť A, čo je 2. **D sa teda musí rovnať 8**.

Tu vidíme, že B musí byť 0, 1 alebo 2, aby v 4 · B nebol presah cez desiatky. Cifru 2 sme však už použili na A, takže B je 0 alebo 1.

Dvojčíslie BA ale musí byť deliteľné štvorkou (lebo pravidlo deliteľnosti štvorkou je: „posledné dvojčíslie je deliteľné štvorkou"), teda BA nemôže byť 02. **B tak musí byť 1**.

V 4 · 8 (4 · D) = 32 je presah cez jednotky 3, takže B = druhá cifra z 4 · C + 3; 1 = druhá cifra z 4 · C + 3. Ak má táto rovnica platiť, tak 4 · C musí končiť cifrou 8. Toto spĺňa len **C = 7** (aj C ako 2, ale tá je použitá). Ostáva nám, že **ABCD = 2178**. Skúška : 2178 · 4 = 8712 -> dostávame ABCD napísané odzadu, takže toto je jediné riešenie.

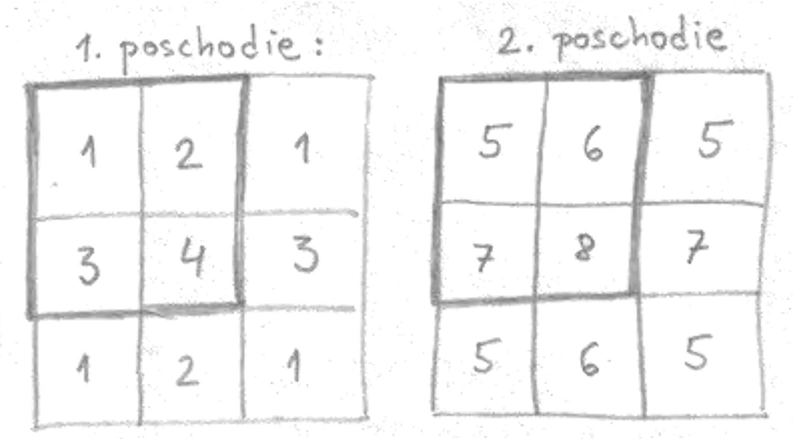
Úloha č. 2 **(***opravovala Iva Jančigová***)**



Zákusok s rozmermi 2x2x2 sa skladá z 8 cukríkových kociek 1x1x1, ktoré sa všetky navzájom dotýkajú v strede. Takže potrebujeme 8 farieb. Týmto sme zdôvodnili, že **na 8 farieb sa to dá** (každá kocka inej farby) a že **na menej to nejde** (lebo sa všetky navzájom dotýkajú).

Kocka s rozmermi 3x3x3 v sebe obsahuje aj kocky 2x2x2. Takže určite sa nebude dať poskladať z menej ako 8 rôznych farieb. Keby sa dala, mohli by sme z nej „vystrihnúť" kocku 2x2x2 zo 7 farieb, ale to už vieme, že nejde. Takže **potrebujeme aspoň 8 farieb**. Treba ešte zistiť, **či sa to na 8 farieb dá**.

Pre zjednodušenie si farby môžeme označiť číslami 1,2, …, 8. Budeme vychádzať z kocky 2x2x2, ktorá má každý 1x1x1 cukrík inej farby a doplníme prvé dve poschodia použitím len týchto farieb:



Všimnime si, že prvé poschodie má len farby 1,2,3,4 a druhé poschodie len farby 5,6,7,8. Takže tretie poschodie môže byť rovnaké ako prvé a žiadne dva cukríky rovnakej farby sa nebudú dotýkať.

Na poskladanie oboch typov zákuskov potrebujeme najmenej 8 rôznych farieb.

Úloha č. 3 ***(opravovala Erika Novotná)***

Chceme zistiť, koľko je medzi týmito tromi indiánmi klamárov. Nevieme to však jednoducho spočítať, lebo v zadaní úlohy nie je napísané, kto je kto. Vieme iba, čo si indiáni navzájom povedali – a z tohoto sa musíme pokúsiť zistiť, kto je kto. Navyše nesmieme zabudnúť, že možností by mohlo byť viacej.

Ako by sme mohli začať? Keďže o žiadnom z indiánov dopredu nevieme, či je klamár, poctivec alebo chytrák, nemôžeme o žiadnej vete s istotou vedieť, či je to klamstvo alebo pravda. Ostáva nám len s nejakou z viet začať a pozrieť sa, či by to mohlo viesť k riešeniu. Rozoberme teda dve možnosti ako by to mohlo byť s Anokiho vetou Bimisimu „Ty si chytrák“:

1. možnosť: Veta, ktorú povedal Anoki, je pravdivá
2. možnosť: Veta, ktorú povedal Anoki, je klamstvo

1. možnosť: Ak Anoki povedal Bimisimu pravdivú vetu „Ty si chytrák”, tak Bimisi musí byť chytrák a Anoki by mohol byť buď poctivec alebo chytrák. O sebe však Bimisi povedal indiánovi Chaskovi klamstvo („Nie som chytrák”). My zo zadania vieme, že chytráci klamú iba klamárom – teda Chaska musí byť klamár. A naozaj, jeho veta „Medzi nami nie je žiadny chytrák“ je klamstvo – veď sú medzi nimi buď dvaja chytráci (ak je aj Anoki chytrák) alebo jeden chytrák (ak je Bimisi chytrák a Anoki poctivec). Našli sme teda dve riešenia, aké postavy mohli indiáni byť:

- **Anoki – poctivec, Bimisi – chytrák, Chaska – klamár**
- **Anoki – chytrák, Bimisi – chytrák, Chaska – klamár**

V oboch prípadoch je však v tejto trojici indiánov iba jeden klamár a to Chaska.

2. možnosť: Ak Anoki povedal klamstvo, tak jeho veta „Ty si chytrák” je nepravdivá a teda Bimisi určite nie je chytrák. Bimisi však o sebe povedal „Ja nie som chytrák”, čo je teda isto pravdivé tvrdenie. Teda indián Bimisi nemôže byť ani klamár. Bimisi musí byť teda poctivec. Anoki potom musí byť klamár – veď povedal poctivcovi Bimisimu, že je chytrák a to je isto klamstvo (Anoki klamajúci chytrák byť nemôže, lebo chytráci poctivcom nikdy neklamú). Vieme teda, že Anoki je klamár a Bimisi je poctivec. Čo by mohol byť Chaska?

- Ak by bol klamár, tak veta „Medzi nami nie je žiadny chytrák” je klamstvo a teda by niekto z nich musel byť chytrák. Pri tejto možnosti je však Anoki klamár, Bimisi poctivec a Chaska klamár – nesedí to teda.
- Ak by bol Chaska poctivec, tak veta „Medzi nami nie je žiadny chytrák” je pravdivá, veď Anoki je klamár, Bimisi je poctivec a Chaska je tiež poctivec. A teda všetko pekne sedí.
- Ak by bol Chaska chytrák, tak vetu „Medzi nami nie je žiadny chytrák“ hovorí klamárovi Anokimu a teda musí byť nepravdivá. To aj sedí, lebo je medzi nimi chytrák Chaska.

Aj v tejto možnosti teda máme dve riešenia, aké postavy mohli indiáni byť:

- **Anoki – klamár, Bimisi – poctivec, Chaska – poctivec**
- **Anoki – klamár, Bimisi – poctivec, Chaska – chytrák**

V oboch prípadoch je však v tejto trojici indiánov iba jeden klamár a to Anoki.

Takto sme prebrali všetky možnosti, ako mohli indiáni hovoriť pravdu alebo klamať a teda, ako vidíme vyššie, zakaždým bol v trojici práve jeden klamár.

Úloha č. 4 ***(****opravovala Maťka Gaňová****)***

Označme si jednotlivé body, tak ako na obrázku. Predĺžme úsečku CB po bod K. Vzniknú nám tak dva trojuholníky: BJK a DCB. Ich uhly KBJ a CBD majú rovnakú veľkosť, keďže sú vrcholovými uhlami. Ich uhly JKB a DCB majú taktiež rovnakú veľkosť, keďže úsečka CK je kolmá aj na úsečku EF aj na úsečku HG. Strany trojuholníkov CB a BK majú obidve rovnakú veľkosť 60 m, keďže vieme, že |CK| = 120 m a |BC| = 60 m, tak dĺžku strany BK vypočítame ako |BK| = |CK| - |BC| = 120 m - 60 m = 60 m. Trojuholníky BJK a DCB sú teda zhodné podľa vety **usu** (uhol-strana-uhol), pretože majú zhodnú veľkosť jednej strany a dvoch uhlov k nej priľahlých.

Sivá časť farmárovho poľa sa skladá z päťuholníku EDBKH a trojuholníku BJK. Päťuholník EDBKH vlastne tvorí obdĺžnik ECKH bez trojuholníka DCB. Keďže trojuholníky BJK a DCB sú zhodné, tak aj ich obsahy sú zhodné a preto obsah sivej časti farmárovho môžeme jednoducho vypočítať ako obsah obdĺžnika ECKH.

Sivá časť farmárovho poľa má teda obsah |EC| · |CK| = 60 m · 120 m = 7200 m^2.