JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXV. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2020/2021, 2. zimná séria

Vzorové riešenia

Úloha č. 1 ***(****opravovali Zuzka Hladká a Timea Jakubócyová****)***

Zo zadania z prvej podmienky vieme, že počty dolárov, ktoré hľadáme, sú medzi **8500** a **8800**, teda všetky riešenia budú začínať cifrou **8**. Z tretej podmienky vieme, že cifra na mieste stoviek je **¾** cifry na mieste tisícok, čo už vieme, že je **8**. Teda na mieste stoviek je **8 · ¾ = 6**. Vieme, že naše číslo bude začínať ciframi **86**.

Ďalej zistíme, čo sa môže nachádzať za desatinnou čiarkou. Aby sme splnili druhú podmienku, že osemnásobok hľadaného čísla je celé číslo, musí byť jeho desatinná časť po vynásobení číslom **8** celé číslo. Preto vydelíme číslom **8** čísla od **0** po **7**:

0 : 8 = 0	**4 : 8 = 0,5**
1 : 8 = 0,125	**5 : 8 = 0,625**
2 : 8 = 0,25	**6 : 8 = 0,75**
3 : 8 = 0,375	**7 : 8 = 0,875**

Takto dostaneme všetky možnosti za desatinnou čiarkou, ktoré sú po vynásobení číslom **8** celé číslo. Vyššie čísla ako **7** už deliť nemusíme, keďže po delení ľubovoľného celého čísla číslom **8** máme len **8** možných zvyškov **0, 1, ..., 7**. Ak tieto zvyšky vydelíme číslom **8** dostaneme jedno z vyššie spomenutých desatinných čísel.

Piatou podmienku, ktorá hovorí, že rozdiel medzi desatinami a stotinami v absolútnej hodnote je **4**, teda rozdiel je **4** alebo **–4**, z vyššie uvedených možností spĺňajú len možnosti **3 : 8 = 0,375** a **5 : 8 = 0,625**.

Ak má riešenie desatinnú časť **0,375**, súčet cifier, ktoré zatiaľ poznáme je **29** (**8 + 6 + 3 + 7 + 5 = 29**). Dve cifry, ktoré treba doplniť na miesto jednotiek a desiatok budú mať ciferný súčet **1**, teda cifry sa musia rovnať **0** a **1**. Pri desatinnej časti **0,375** máme teda možnosti riešenia **8610,375 a 8601,375.**

Ak má riešenie desatinnú časť **0,625**, súčet cifier, ktoré zatiaľ poznáme je **27** (**8 + 6 + 2 + 6 + 5 = 27**). Dve cifry, ktoré treba doplniť na miesto jednotiek a desiatok budú mať ciferný súčet **3**, teda cifry sa musia rovnať buď **0** a **3**, alebo **1** a **2**. Pri desatinnej časti **0,625** máme teda **4** možnosti riešenia **8630,625; 8603,625; 8621,625 a 8612,625.**

Ľahko overíme, že všetky nájdené riešenia spĺňajú aj šiestu podmienku. Takže máme **6** možností koľko dolárov mohlo byť na pobočke: **8610,375; 8601,375; 8630,625; 8603,625; 8621,625 a 8612,625.**

***Úloha č. 2** (opravoval Adam Kňaze)*

Zo zadania vieme, že si Bernt a Adleman rozdelili cukríky na polovicu, každý ich mal teda rovnako veľa a postavili si rovnako veľké kocky. Omaľovali tiež rovnako veľa stien kocky polevou, po rozložení však dostali rôzny počet zafarbených cukríkov. Jediná vec, ktorá mohla spôsobiť tento rozdiel bol výber konkrétnych troch stien kociek, ktoré omaľovali. Skúšaním pár ofarbení rýchlo zistíte, že ak nás nezaujíma otočenie kocky (čo nás nezaujíma), existujú len dve rôzne ofarbenia troch stien kocky. Buď sa všetky tri ofarbené steny stretávajú pri spoločnom vrchole (nazvime si ho **variant 1**), alebo sú dve ofarbené steny oproti sebe a tretia sa ich dotýka oboch (**variant 2**).

Keď vieme ako budú Bernt s Adlemanom ofarbovať, môžeme si skúsiť spočítať koľko bude mať kto zafarbených cukríkov. Budeme to riešiť všeobecne, rozmer kocky (dĺžka jej hrany) bude teda nejaké neznáme číslo **a**. Začnime **variantom 1**. Najprv zarátame jednu z troch stien, bude sa skladať z **a · a** zafarbených cukríkov. Ďalšia susedná stena bude mať tiež **a · a** cukríkov, keďže však susedí s prvou stenou, rad rohových cukríkov sme už raz zarátali. Pripočítame teda len **a · (a - 1)** cukríkov. Posledná ofarbená stena susedí jednou hranou s prvou stenou, počítame teda o jeden rad cukríkov menej, ale susedí tiež aj s druhou stenou, aj tu teda počítame o rad menej. Dokopy za všetky tri strany spočítame, že počet zafarbených cukríkov je **a · a + a · (a - 1) + (a - 1) · (a - 1)**.

Vo **variante 2** to bude fungovať veľmi podobne. Prvá stena má **a · a** cukríkov, druhá s ňou susedí jednou hranou čiže **a · (a - 1)**, a tretia stena tento krát susedí iba z druhou stenou, pripočítame teda tiež **a · (a - 1)** cukríkov. Keď máme takéto dva vzorce môžeme ich od seba odčítať aby sme zistili aký je ich rozdiel:

$$[\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{1}) + \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{1})] - [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{1}) + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{1}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{1})]$$

Môžeme si všimnúť, že v oboch vzorcoch sú prvé dve násobenia (prvé dve steny kocky) rovnaké, navzájom sa teda zrušia. Ostane len:

$$[\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{1})] - [(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{1}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{1})]$$

Na oboch stranách rozdielu násobím tú istú vec (**a - 1**). V jednom prípade ju násobím **a** krát, v druhom **a - 1** krát, keď druhé odčítam od prvého ostane mi tá vec jeden krát. Rozdiel v počte zafarbených cukríkov je teda **a - 1**. Podľa zadania sa má tento rozdiel rovnať **99**, ľahko teda odvodíme, že **a** musí byť **100**. Dosadením do vzorcov si potvrdíme, že vo **variante 1** bude **29701** zafarbených cukríkov a vo **variante 2** ich bude **29800**, rozdiel **99** teda sedí. Kocka s hranou dĺžky **100** sa bude skladať zo **100 · 100 · 100** cukríkov, čo je rovný milión, a keďže kocky boli dve aj milióny budú dva. A to je celkový počet cukríkov, ktorý bol na začiatku v cukrárni.

*Viacerí z vás úlohu riešili tak, že ste skúsili ofarbenia pre menšie kocky (s hranou dĺžky 3, 4, 5...) a všimli si vzťah **a - 1**. Ten ste potom rovno aplikovali na hľadané číslo **99** a vypočítali výsledok. Toto je správny postup, aby však bol kompletný musíte ešte niečo doplniť. Totiž skúšaním na malých kockách ste ešte neukázali, že bude rovnaký vzťah platiť aj pre veľké kocky. Môžete to buď ukázať všeobecne (ako sme to spravili v tomto vzoráku), alebo stačí spraviť skúšku správnosti – zoberiete kocku s hranou dĺžky **100**, spočítate počet zafarbených cukríkov pre obe ofarbenia a skontrolujete či je ich rozdiel naozaj **99**. Bez toho totiž riešenie nie je kompletné.*

Úloha č. 3 *(opravovala Betka Bohiníková)*

Na riešenie tohto príkladu prišlo veľa riešiteľov skúšaním. Pri skúšaní ste si občas všimli pekné veci, ktoré pomohli pri zmenšovaní súčtu čísel z ktorého ste začali. Ale nie všetci sa dostali k najmenšiemu súčtu. Skúsime tu preto načrtnúť ako mohlo skúšanie prebiehať. A možno v tomto postupe nájdete svoj výsledok a uvidíte akou úvahou sa dalo prísť k tomu, ako sa dal ešte zmenšiť.

Prvou myšlienkou mnohých bolo doplniť do štvorca iba párne čísla. Tie majú všetky spoločného deliteľa **2**, čo je najmenší možný spoločný deliteľ vôbec okrem jednotky. Takto ste dostali súčet **90**. Pri pohľade na toto riešenie, si niektorí všimli, že medzi číslami **2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18** je viacero deliteľných **3** a že súčet by sa dal zmenšiť pomocou toho, že jedno z nich nahradíme číslom **3**. Aby sme mali čo najmenší súčet, nahradíme najväčšie číslo. Dostávame sa na súčet **75**.

Potom niektorí túžobne pozreli na **10**, a všimli si, že tá sa dá deliť aj **5**. A nahradiť **16** za **5** by tiež zmenšilo súčet. Avšak aby sme mohli použiť **5**, musíme mať aspoň **2** čísla ktoré vedia byť jej susedia. Zatiaľ máme **10**. Najmenšie ďalšie číslo čo prichádza do úvahy je **15**. To je síce väčšie ako **14**, ale keďže nám umožní použiť **5**, stále sme na menšom súčte, ktorý je **65**. Ešte musíme čísla poukladať do tabuľky. Spôsobov je viac, tu ponúkame jeden z nich:

5	15	3
10	12	6
2	4	8

Teraz sa nám už zdá, že máme aj najmenší súčet. Musíme však dokázať prečo menší nevieme nájsť.

Tu pomôže pozrieť sa na úlohu z opačného konca. Ak majú mať susediace čísla spoločného deliteľa väčšieho ako **1**, nemôžeme použiť **1**. Potom teoreticky najmenší možný súčet **9** rôznych prirodzených čísel je **2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 54**. Menší teda určite dostať nevieme.

Ak chceme nejaké číslo umiestniť do tabuľky, musí mať minimálne **2** čísla ktoré by mohli byť jeho susedia. Dôvodom je, že čísla v tabuľke majú **2**, **3** alebo **4** susedov.

Z toho potom usúdime, že **7** je nepoužiteľná. keďže jej najmenší možný susedia sú **14** a **21**. Miesto **7** by sme teda vzali ďalšie číslo v poradí, tou je **11** a je rovnako nepoužiteľná ako **7**, premyslite si prečo. Vezmeme si teda **12**. Náš súčet je momentálne na **59**. Ten však nevieme vložiť do tabuľky.

Problémom je **5** a **9**. Ak ich vyškrtneme obe, a nahradíme najmenšími možnými číslami čo nám zostávajú, použili by sme **14** a **15**. To už však dostaneme oveľa väčší súčet ako **65**. A pokiaľ máme **15**, tak **5** nie je problém. Dospeli sme tak k rovnakému súčtu, s tým že sme sa pokúsili ukázať dôvody prečo menšie čísla už nebolo možné použiť.

Úloha č. 4 *(opravovali Miška Rosinská a Kubo Kaloč)*

V zadaní vidíme **4** podmienky na ťahanie pohárov. Môžeme zostaviť sústavu štyroch nerovníc, tak aby každá nerovnica súvisela s jednou podmienkou zo zadania. Podľa prvej podmienky, vieme že keď James vytiahne **27** pohárov, **<u>aspoň</u>** jeden pohár je zelený, a ostatné sú s ľubovoľnej farby. Súčet červených, modrých a žltých (alebo ako ste viacerí písali, súčet nezelených pohárikov) je teda **<u>najviac</u>** **26**. V tomto kroku si bolo treba dať veľký pozor, pretože súčet nie je rovný **26**, keďže medzi vytiahnutými pohármi môže byť viac ako jeden zelený pohár. Pokiaľ by James vytiahol **27** pohárov a zelených by bolo napríklad päť, tak by podmienka zo zadania stále platila, ale pohárov ostatných farieb by bolo v tomto prípade len dvadsaťdva. Teda : $Č + M + Ž \leq 26$. (Č, Ž, M a Z vyjadrujú počty červených, žltých, modrých a zelených pohárov v kredenci)

Tým istým spôsobom vyjadríme ďalšie tri nerovnice zo zvyšných podmienok. Dostaneme takto sústavu štyroch nerovníc:

$$\begin{cases} Č + Ž + M \leq 26 \\ Z + Ž + M \leq 24 \\ Z + Č + M \leq 21 \\ Z + Č + Ž \leq 16 \end{cases}$$

Následne môžeme sčítať všetky štyri nerovnice. Vyjde nám nerovnica, v ktorej je možné pekne vydeliť obidve strany troma :

$$3Z + 3Ž + 3Č + 3M \leq 87 \quad \rightarrow \quad Z + Ž + Č + M \leq 29.$$

Z tejto nerovnice vidíme že súčet počtov pohárov zo všetkých farieb je najviac **29**. Musíme ešte ukázať že pre **29** pohárov existuje riešenie, a tak hľadáme rozdelenie farieb kde všetky podmienky zo zadania sedia.

Chceme ako prvé nájsť koľko je zelených pohárov v kredenci. Na to odpočítame nerovnicu z prvej podmienky od poslednej nerovnice ktorú sme vytvorili, pretože nám po odpočítaní ostane jediné písmenko:

$$\begin{array}{c} Č + Ž + M + Z \leq 29 \qquad \rightarrow \qquad Z \leq 3 \\ -\ (Č + Ž + M \leq 26) \end{array}$$

Tak postupne odpočítame všetky nerovnice a dostaneme : $Z \leq 3$, $Č \leq 5$, $Ž \leq 8$ a $M \leq 13$. Keď vyberieme najväčší možný počet z každej farby, teda tri zelené, päť červených, osem žltých a trinásť modrých pohárov, máme spolu presne **29** pohárov. Pre **29** pohárov sme teda našli správne rozdelenie a James môže teda mať najviac **29** pohárov v kredenci.

V druhom kroku riešenie ideme zistiť najmenší počet pohárov ktorý James môže mať v kredenci. Zo zadania vieme že James vytiahol **27** pohárov, takže v kredenci ich má najmenej **27**. Ako pre **29** pohárov, musíme ešte nájsť jednu zostavu pohárov pre ktorú všetky podmienky zo zadania platia. Ako ste mnohí v riešeniach písali, jeden zelený pohár stačí aby bola prvá podmienka splnená. Pokiaľ teda necháme Jamesovi len jeden zelený pohár miesto troch, tak oproti rozdeleniu pre **29** pohárov sme znížili počet pohárov o **2**. Overíme nakoniec ešte riešenie kde je **1** zelený pohár, **5** červených, **8** žltých a **13** modrých pohárov oproti podmienkam zo zadania:

$5 + 8 + 13 = 26 \leq 26$ (prvá podmienka, súčet nezelených)
$1 + 8 + 13 = 22 \leq 24$ (druhá podmienka, súčet nečervených)
$1 + 5 + 13 = 21 \leq 22$ (tretia podmienka, súčet nežltých)
$1 + 5 + 8 = 14 \leq 16$ (štvrtá podmienka, súčet nemodrých)

Všetky podmienky sú splnené, takže najmenší počet pohárov čo James môže mať v kredenci je **27** a najväčší je **29**.