JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXV. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2020/2021, 3. zimná séria

Vzorové riešenia

Úloha č. 1 (*opravoval Mojmír Majdiš****)***

Najprv zistíme koľko vriec má v sebe cifru **3**. Vieme, že tieto vrecia majú spolu váhu **80**. Ak by také vrece bolo len jedno tak by muselo mať práve **80** libier – čo však nie je možné, pretože **80** neobsahuje cifru **3**. Takisto to nemôžu byť všetky **3**, pretože by sme už nevedeli dosiahnuť **90** libier s cifrou **4**. Takže musia byť práve **2** vrecia, ktorých váha obsahuje cifru **3**.

Koľko je však takých vriec, ktoré obsahujú cifru **4**? Takisto nemôže byť len jedno – muselo by mať **90** libier a číslo **90** neobsahuje cifru **4**. Čo ak by to boli všetky **3** vrecia? To by znamenalo, že **3** vrecia majú spolu **90** libier a **2** z nich **80** (to sme si už povedali vyššie). A teda to tretie vrece musí mať **90 – 80 = 10** libier. Avšak číslo **10** neobsahuje cifru **4** a tak ani táto možnosť neprichádza do úvahy. A teda aj vrecia s cifrou **4** vo váhe musia byť dve.

Keďže vriec s cifrou **3** aj s cifrou **4** sú po dve a celkovo máme **3** vrecia, tak váha aspoň jedného vreca musí obsahovať aj cifru **3** aj cifru **4**. Také dvojciferné čísla sú len **2** a to **34** a **43**.

Ak by jedno vrece malo **34** libier, tak druhé vrece, ktorého váha obsahuje cifru **3** by muselo byť **80 − 34 = 46**. Avšak číslo **46** neobsahuje cifru **3** a preto takáto možnosť neprichádza do úvahy.

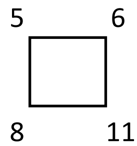
V prípade, že má jedno vrece **43** libier tak druhé vrece má **80 − 43 = 37**, čo spĺňa podmienky. Tretie vrece, ktorého váha musí obsahovať cifru **4** musí mať **90 − 43 = 47** libier, čo takisto spĺňa podmienky. Našli sme teda jediné možnosti pre váhu jednotlivých vriec.

Spolu všetky vrecia vážia **43 + 37 + 47 = 127** libier.

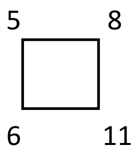
Úloha č. 2 (*opravoval Ján Jakubík****)***

Keďže súčet počtu modrých cukríkov je v Jessicinej aj Sussaninej časti nemenný (**5 + 6 + 8 + 11** alebo **5 + B + C + D**) stačí ak sa zameriame iba na počty červených cukríkov.

Pozrime sa najskôr akými všetkými možnosťami mohla Jessica uložiť svoje modré cukríky do vrcholov štvorca. Vrecko s piatimi cukríkmi musí zostať v ľavom hornom rohu. Musíme teda uložiť tri vrecká s počtami cukríkov (**6, 8** a **11**) do troch vrcholov štvorca. To nám dáva **6** možností uloženia cukríkov, lebo **3 · 2 · 1 = 6**. Poďme si ich teda nakresliť a vypočítať koľko červených cukríkov mohla Jessica dostať:

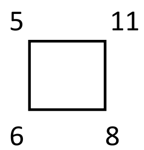


Prvá možnosť uloženia cukríkov:
(6 − 5) + (11 − 6) + (11 − 8) + (8 − 5) =
= 1 + 5 + 3 + 3 = 12 červených cukríkov.

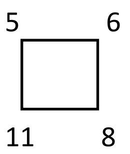


Druhá možnosť uloženia cukríkov:
(8 − 5) + (11 − 8) + (11 − 6) + (6 − 5) =
= 3 + 3 + 5 + 1 = 12 červených cukríkov.

Pri prvej a druhej možnosti uloženia vreciek s cukríkmi si môžeme všimnúť, že rozdiely **(6 − 5), (11 − 6), (11 − 8)** a **(8 − 5)** sa nám v súčtoch opakujú v oboch možnostiach. Ak porovnáme obe možnosti vidíme, že uloženie vreciek s **5** a **11** cukríkmi sa nezmenilo a zmenilo sa iba uloženie vreciek s **6** a **8** cukríkmi. Z toho vyplýva, že ak vrecká s počtami cukríkov **6** a **8** vymeníme medzi sebou neovplyvní to výsledný počet červených cukríkov.

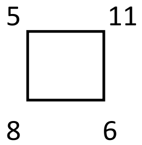


Tretia možnosť uloženia cukríkov:
(11 − 5) + (11 − 8) + (8 − 6) + (6 − 5) =
= 6 + 3 + 2 + 1 = 12 červených cukríkov.

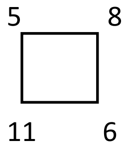


Štvrtá možnosť uloženia cukríkov:
(6 − 5) + (8 − 6) + (11 − 8) + (11 − 5) =
= 1 + 2 + 3 + 6 = 12 červených cukríkov.

Rovnako pri tretej a štvrtej možnosti uloženia cukríkov si môžeme všimnúť, že rozdiely **$(11 - 5)$, $(11 - 8)$, $(8 - 6)$** a **$(6 - 5)$** sa nám v súčtoch opakujú v oboch možnostiach. Podobne ako pri prvej a druhej možnosti uloženia vreciek s cukríkmi môžeme povedať že ak medzi sebou vymeníme vrecká s **6** a **11** cukríkmi tak to výsledný počet červených cukríkov neovplyvní.



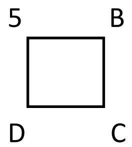
Piata možnosť uloženia cukríkov:
$(11 - 5) + (11 - 6) + (8 - 6) + (8 - 5) =$
$= 6 + 5 + 2 + 3 = 16$ červených cukríkov.



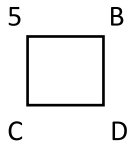
Šiesta možnosť uloženia cukríkov:
$(8 - 5) + (8 - 6) + (11 - 6) + (11 - 5) =$
$= 3 + 2 + 5 + 6 = 16$ červených cukríkov.

Zo všetkých možností uloženia cukríkov sa nám podarilo získať najviac červených cukríkov v piatej a šiestej možnosti a to **16**. Pri týchto možnostiach si opäť všímame, že rozdiely **$(11 - 5)$, $(11 - 6)$, $(8 - 6)$** a **$(8 - 5)$** sa nám opakujú v oboch možnostiach a teda ak medzi sebou vymeníme vrecká s **8** a **11** cukríkmi výsledný počet červených cukríkov to nezmení.

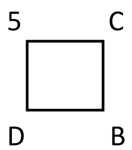
Poďme sa teraz pozrieť na Susanin prípad. Vrecko s piatimi modrými cukríkmi musí byť opäť v ľavom hornom rohu. Musíme teda uložiť tri vrecká s počtami modrých cukríkov (**B, C** a **D**) do troch vrcholov štvorca. To nám dáva **6** možností uloženia cukríkov, avšak po skúsenosti z Jessicinej časti môžeme tento počet možností ešte zmenšiť. V každej z dvojíc možností uloženia vreciek s modrými cukríkmi (prvá a druhá, tretia a štvrtá, piata a šiesta) sme mohli medzi sebou vymeniť vrecká ktoré sa nenachádzali „cez uhlopriečku“ oproti vrecku s piatimi modrými cukríkmi bez zmeny výsledného počtu červených cukríkov. Stačí nám teda nakresliť a vypočítať koľko červených cukríkov mohla Susan získať iba pre prípady keď sa „cez uhlopriečku“ oproti vrecku s piatimi modrými cukríkmi nachádzajú vrecká s počtom **B, C** a **D** modrých cukríkov:



Siedma možnosť uloženia cukríkov:
$(B - 5) + (C - B) + (D - C) + (D - 5) = B - 5 + C - B + D - C + D - 5 =$
$= 2 \cdot (D - 5)$ červených cukríkov.
Vrecká s počtom cukríkov **B** a **C** sa môžu medzi sebou navzájom vymeniť bez ovplyvnenia výsledného počtu červených cukríkov.



Ôsma možnosť uloženia cukríkov:
$(B - 5) + (D - B) + (D - C) + (C - 5) = B - 5 + D - B + D - C + C - 5 =$
$= 2 \cdot (D - 5)$ červených cukríkov.
Vrecká s počtom cukríkov **B** a **C** sa môžu medzi sebou navzájom vymeniť bez ovplyvnenia výsledného počtu červených cukríkov.



Deviata možnosť uloženia cukríkov:
$(C - 5) + (C - B) + (D - B) + (D - 5) = C - 5 + C - B + D - B + D - 5 =$
$= 2 \cdot (D - 5) + 2 \cdot (C - B)$ červených cukríkov.
Vrecká s počtom cukríkov **D** a **C** sa môžu medzi sebou navzájom vymeniť bez ovplyvnenia výsledného počtu červených cukríkov.

Ak porovnáme výsledný počet čerených cukríkov v týchto troch možnostiach uloženia cukríkov (siedma, ôsma a deviata možnosť) vidíme, že v deviatej možnosti je výsledný počet červených cukríkov o **$2 \cdot (C - B)$** väčší, pretože rozdiel **$(C - B)$** je vždy kladné číslo lebo zo zadania platí **$5 < B < C < D$** (**C** je väčšie ako **B** a obe čísla sú väčšie ako **5**). Taktiež rozdiel **$(D - 5)$** je kladný z rovnakých dôvodov ako **$(C - 5)$.**

Ak teda Jessica uloží svoje vrecká s modrými cukríkmi podľa piatej alebo šiestej možnosti uloženia cukríkov alebo ak bude postupovať tak, že oproti „cez uhlopriečku“ k vrecku s piatimi modrými cukríkmi umiestni vrecko s **6** modrými cukríkmi, dostane tak najväčší možný počet všetkých cukríkov a to **(5 + 6 + 8 + 11) + (16) = 46** cukríkov.

Ak Susan uloží svoje vrecká s modrými cukríkmi podľa deviatej možnosti uloženia cukríkov alebo ak bude postupovať tak, že oproti „cez uhlopriečku" k vrecku s piatimi modrými cukríkmi umiestni vrecko s **B** modrými cukríkmi (čo je druhý najmenší počet modrých cukríkov lebo **5 < B < C < D**), dostane tak najväčší možný počet všetkých cukríkov a to **(5 + B + C + D) + (2 · (D – 5) + 2 · (C – B)) = 3 · (D + C) – B – 5** cukríkov.

Úloha č. 3 ***(opravovala Denisa Múthová)***

Našou úlohou je zistiť, či sa podľa pravidiel hry s fazuľkami dá alebo nedá vytvoriť **105** kôpok po jednej fazuľke. Vieme, že na začiatku hry majú Susan a Jessica tri kôpky s **5, 49** a **51** fazuľkami.

Pri hre sú možné len dva počtom neobmedzené ťahy:

1. Hocijaké dve kôpky môžeme spojiť do jednej.
2. Ak nejaká kôpka obsahuje parný počet fazuliek, môžeme ju rozdeliť na dve menšie kôpky s rovnakým počtom fazuliek.

Na začiatku máme tri kôpky s nepárnym počtom fazuliek tak prvý ťah musí byť že spojíme dve kôpky. Máme tri možnosti na prvý ťah:

1. Spojíme kôpku **5** a **49**
2. Spojíme kôpku **5** a **51**
3. Spojíme kôpku **51** a **49**

Pozrime sa na naše možnosti:

1. Dostaneme dve kôpky **54** a **51**. A snažíme sa dostať na konci ku kopkám po **1** fazuľke. Spájaním a rozpájaním kôpok sa vieme dostať až ku **3** fazuľkám v kôpke, pretože obidve čísla majú najmenšieho prvočíselného deliteľa číslo **3**. Bohužiaľ ďalej ale nevieme spraviť kôpky po **1** fazuľke a preto táto možnosť nefunguje.
2. Dostaneme dve kôpky **56** a **49**. Spájaním a rozpájaním kôpok sa vieme dostať až ku **7** fazuľkám v kôpke, pretože obidve čísla majú najmenšieho prvočíselného deliteľa číslo **7**. Preto ani táto možnosť nefunguje.
3. Dostaneme dve kôpky **100** a **5**. Spájaním a rozpájaním kôpok sa vieme dostať až ku **5** fazuľkám v kôpke, kde **5** je ich najmenšie prvočíslo. Preto ani táto možnosť nefunguje.

Odpoveď teda znie: Podľa zadaných pravidiel sa nedá hru vyhrať.

Aký počet fazuliek by mohol byť na začiatku, aby sa hra dala vyhrať?

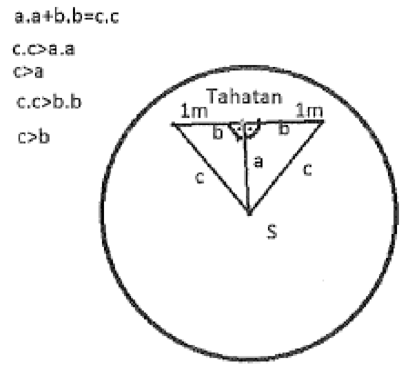
Poďme odzadu a to že máme veľa kôpok po **1** fazuľke. Ak ich pospájame dostaneme kôpky s **2** fazuľkami. Ak tie znova pospájame dostaneme kôpky s **4** fazuľkami. A ďalej s **8, 16, 32, 64** atď. Najbližšie číslo ku **105** vieme vytvoriť **104** (sčítaním **64 + 32 + 8**).

Úloha č. 4 ***(opravoval Hynek Bachratý)***

Poradiť ***T***ahatlanovi, ako utiecť čo najrýchlešie z kruhu, aj keď sa mu to ***Š***aman snaží čo najviac komplikovať, bolo ozaj ťažké. Preto sme boli veľmi radi, že skoro všetci, ktorí si na túto úlohu trúfli, našli správny postup.

Tak si ho najskôr popíšeme. Pri prvom kroku zo stredu kruhu môže ***T*** ukázať kam chce. Aj keby ho ***Š*** poslal dozadu, vždy by sa vzdialil presne meter od stredu. Ale pri každom ďalšom kroku už musí postupovať rafinovanejšie. Treba, aby vždy ukázal smerom kolmým na úsečku, ktorá spája jeho pozíciu so stredom kruhu. Keď bude takto ***T*** vytrvalo pokračovať, časom sa dostane na okraj kruhu. A naozaj to bude najrýchlejší spôsob ako to dosiahnuť, ak sa bude ***Š*** vždy snažiť vybrať mu horší z dvoch smerov.

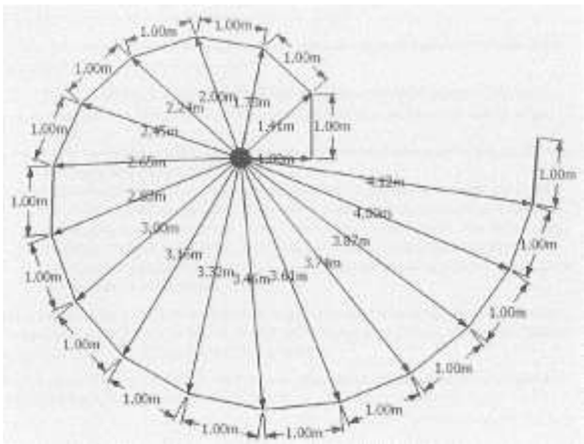
Pôvodne som myslel, že každému, kto našiel tento správny návod na zloženie skúšky, dáme plný počet bodov. Ale na rozdiel od Divokého Západu v Sezame potrebujeme aj zdôvodnenie správnosti riešenia úlohy. A keďže viacerí sa o to úspešne pokúsili, na plný počet bodov bolo treba okrem návodu pre ***T*** napísať ešte kúsok viac.



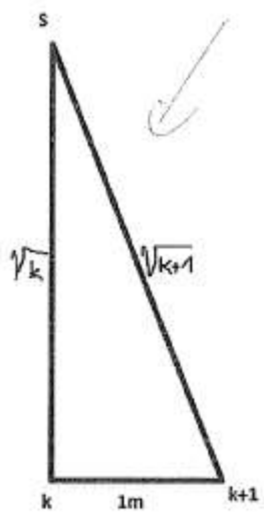
Skoro všetci si všimli, že pri použití kolmice nám vlastne ***Š*** nemá ako uškodiť. Nech nám povie „dozadu“ alebo „dopredu“, náš pohyb je symetrický, a vzdialenosť od stredu sa zmení v oboch prípadoch rovnako. To ale automaticky neznamená, že sa musí vždy zväčšiť (môže sa aj rovnako zmenšiť), že sa tým ozaj dostaneme až na okraj kruhu, a že sa to nedá inak a lepšie.

Prvá vec teda bola zdôvodniť, že pri pohybe po kolmici sa vždy vzdialime (a rovnako pre oba smery) od stredu kruhu. K tomu stačilo povedať, že v pravoúhlom trojuholníku je prepona dlhšia ako odvesna, alebo to jasne nakresliť.

To, že sa po každom kroku vzdialime od stredu ale, ešte nemusí znamenať, že sa dostaneme tak ďaleko ako treba. (Všimnite si napríklad postupnosť zlomkov $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$. Každý ďalší z nich je väčší a teda ďalej od nuly, ale nikdy sa nedostanú ani len do čísla **1** !).



Viacerí z vás si ale vzdialenosti od stredu kruhu po jednotlivých krokoch pomocou Pytagorovej vety spočítali. A zistili, žo po prvom kroku je vzdialenosť **1**, po druhom $\sqrt{2}$, po treťom $\sqrt{3}$, po štvrtom $\sqrt{4}$ atď. Z toho je jasné, že sa vzďujeme stále viac a viac, a vieme, že na okraji kruhu sme po **100** krokoch ($\sqrt{100} = 10$). (Tu treba pochváliť aj tých, ktorý Pytagorovu vetu ešte tak dobre nepoznajú, a celý postup ***T*** narysovali. Nikto ale nemal takú ostrú ceruzu a kvalitné kružítko, aby mu presne **100** krokov vyšlo aj týmto postupom.)



Posledná vec je vysvetliť, prečo je tento postup (pri zlomyslenom ***Š***) najrýchlejší. Viacerí to zdôvodnili tým, že „kolmicový“ postup je jediný, akým sa z kruhu vôbec dá dostať. To ale nie je úplne pravda. Ak by ***T*** napríklad miesto **90°** od spojnice svojej polohy zo stredom ukázal vždy **89°**, tiež by sa v oboch prípadoch od stredu vzdiali, a časom by z kruhu tiež vyšiel (premyslite si!). Takže spôsobov úniku je viac, a treba preto aj vysvetliť, že kolmicový je najlepší. K tomu bolo treba vysvetliť, že ak **nepoužíjeme** kolmice, tak **horší** z možných krokov (ktorý si ***Š*** vyberie), nebude najlepší možný. Tí, ktorým sa toto podarilo, dostali za úlohu známku 5*. *(Za obrázky ďakujem Katke O., Zuzke B. a Matejovi C.)*