JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXV. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2021/2022, 2. letná séria

Vzorové riešenia

***Úloha č. 1** (opravovali Miška a Juro Rosinský)*

Vypíšme si najskôr jeden celý ročný kalendár a spočítajme, na ktoré dni v týždni padli trináste dni v mesiaci. Tu je napríklad kalendár pre rok 2022:

Január

po	ut	st	št	pi	so	ne
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	$\boxed{13}$	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Február

po	ut	st	št	pi	so	ne
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	$\boxed{13}$
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28						

Marec

po	ut	st	št	pi	so	ne
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	$\boxed{13}$
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Apríl

po	ut	st	št	pi	so	ne
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	$\boxed{13}$	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Máj

po	ut	st	št	pi	so	ne
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	$\boxed{13}$	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Jún

po	ut	st	št	pi	so	ne
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
$\boxed{13}$	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Júl

po	ut	st	št	pi	so	ne
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	$\boxed{13}$	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

August

po	ut	st	št	pi	so	ne
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	$\boxed{13}$	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

September

po	ut	st	št	pi	so	ne
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	$\boxed{13}$	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Október

po	ut	st	št	pi	so	ne
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	$\boxed{13}$	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

November

po	ut	st	št	pi	so	ne
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	$\boxed{13}$
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

December

po	ut	st	št	pi	so	ne
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	$\boxed{13}$	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Môžeme si zhrnúť v tabuľke, koľkokrát padol dátum trinásteho na ktorý deň v týždni:

pondelok	1
utorok	2
streda	2
štvrtok	2
piatok	1
sobota	1
nedeľa	3

Všimnime si, že na jeden deň v týždni pripadajú najviac tri dni trinásteho. V roku 2022 to bola nedeľa, no ako vieme, každý rok sa tento deň posunie. To, že sa konkrétne dátumy posúvajú v týždni si vieme overiť napríklad tým, že sa pozrieme na 1.1. v kalendároch pre rôzne roky. Pre 2022 je to sobota, no pre 2023 to je nedeľa a pre 2022 pondelok.

Podobne by sme vedeli zistiť, v ktorom roku padnú tieto tri trináste dni v mesiacoch na piatok. Stačí nám v kalendároch pozorovať jeden z nich – napríklad 13.2. Môžeme si overiť, že najbližšie padne 13.2 na piatok v roku 2026, a taktiež spolu s ním aj 13.3 a 13.11.

V jednom nepriestupnom roku teda môžu byť najviac tri piatky trinásteho.

Úloha č. 2 (*opravovala Denisa Múthová****)***

Máme zistiť, koľko najviac kilogramov záťaže na vrchnej posteli ešte pyramída unesie pri podmienkach zo zadania. Máme dokopy **14** postelí, **9** na treťom spodnom poschodí, **4** na druhom poschodí a **1** na vrchnom poschodí. Každá posteľ váži **200 kg** a má **4** nohy, z ktorých má každá maximálnu nosnosť **200 kg**. Váha postele je rovnomerne rozložená na jej nohy, teda každá noha nesie z vlastnej postele váhu **50 kg**.

Poďme si najskôr pozrieť akú váhu nesú jednotlivé postele a ich nohy ak nepridáme žiadnu záťaž na vrchnú posteľ. Každá noha vrchnej postele nesie váhu **50 kg**. Postele stredného poschodia teda nesú **200 + 50** (z vrchnej postele) **= 250 kg**. Každá posteľ stredného poschodia rozloží rovnomerne svoju celkovú váhu **250 kg** na **4** postele pod ňou, **250 : 4 = 62,5 kg**. Prostredná posteľ spodného poschodia drží až **4** nohy z postelí na druhom poschodí a svoju váhu, **62,5 · 4 + 200 = 450 kg**, teda každá jej noha nesie hmotnosť **450 : 4 = 112,5 kg**, čo je menej ako maximálna nosnosť **200 kg**. Krajné postele spodného poschodia držia **1** alebo **2** postele, teda menej ako prostredná posteľ a váhu pyramídy udržia.

Skúsme začať s maximálnou váhou, ktorú unesie vrchná posteľ a pozrieme sa či túto váhu odnesú aj všetky postele pod ňou. Maximálna váha vrchnej postele, ktorú ešte udržia jej nohy je **800 kg**, z čoho je **200 kg** váha samotnej postele a **600 kg** záťaž. Pri tejto váhe bude každá noha postele niesť **800 : 4 = 200 kg**, čo je maximum pre každú nohu. Postele na druhom poschodí potom budú niesť **200 kg** vlastnej váhy a **200 kg** vrchnej postele a každou svojou nohou zaťažia postele spodného poschodia **400 : 4 = 100 kg**. Stredná posteľ na spodnom poschodí bude držať svoju váhu **200 kg** a štyri nohy z postelí nad ňou, teda **200 + 4 · 100 = 600 kg**, čo je menej ako maximálna nosnosť **800 kg**. Krajné postele spodného poschodia stále držia iba **1** alebo **2** postele, teda menej ako prostredná posteľ a váhu pyramídy taktiež udržia.

Prišli sme na riešenie, pri podmienkach zo zadania unesie ešte pyramída najviac 600 kilogramov záťaže na vrchnej posteli.

Úloha č. 3 *(opravovala Kaťa Buzáková)*

Máme **27** krabíc poukladaných do tvaru kocky, teda jedna strana kocky je dlhá **3** krabice. Chceme ich poukladať tak, aby súčty čísel na krabiciach, ktoré sú uložené v jednom riadku alebo stĺpci boli rôzne. Koľko takýchto súčtov máme? Každá krabica sa nachádza práve v troch takýchto súčtoch, pretože kocka je trojrozmerný útvar. Jeden ide zhora nadol, jeden sprava doľava a jeden spredu dozadu. Takže potrebujeme **27** rôznych súčtov.

Použiť máme číslice od **0** do **8**. Keďže krabíc je **27** a sú očíslované deviatimi rôznymi číslicami je jasné, že niektorými číslicami je označených viacero krabíc. Najmenší súčet, ktorý vieme z číslic **0** až **8** vytvoriť je **0 + 0 + 0 = 0**. Naopak najväčší súčet, ktorý vieme vytvoriť je **8 + 8 + 8 = 24**. To, že vieme vytvoriť všetky súčty od **0** do **24** si vyskúšajte doma :) . Takže celkovo vieme vytvoriť iba **25** rôznych súčtov. Ale potrebujeme ich **27**.

To znamená, že krabice sa takto poukladať nedajú.

Úloha č. 4 *(opravovali Maťo Bachratý a Matúš Jonaštík)*

Ako Vám aj napovedalo zadanie, dobrý začiatok pri riesení tejto úlohy je zahrať sa na Bernta a vyskúšať si niekoľko takýchto prechádzok s hádzaním mincou. Ak ste to spravili, mohli ste si všimnúť, že dĺžky prechádzok boli len párne čísla väčšie alebo rovné ako **2 km**. Prečo je to tak? Cesta dlhá **1 km** očividne neexistuje, preto je najkratšia prechádzka dlhá **2 km**. (Napríklad do severnej veže a naspäť do západnej.) Keďže po každom nepárnom kroku bude Bernt na veži **N** alebo **S** a po každom párnom kroku bude na **W** alebo **E**, tak je zjavné, že jeho prechádzka môže skončiť len po párnom počte kilometrov.

Ešte je fajn zamyslieť sa nad tým, aká najdlhšia by mohla Berntova prechádzka byť. Viacerí ste správne prišli na to, že sa Berntovi môže stať, že bude do nekonečna chodiť medzi dvoma vežami (napríklad medzi južnou a východnou). Preto môže byť jeho prechádzka neobmedzene dlhá.

Teraz ste sa mnohí pustili do rozoberania, ako mohla Berntova prechádzka pekne od začiatku vyzerať. O hode mincou je dobré vedieť to, že obe strany mince majú rovnakú pravdepodobnosť padnúť. Preto je na každú z nich pravdepodobnosť **50 %**. Na začiatku svojej prechádzky má Bernt **50 %** šancu, že pôjde z **W** na **N** a **50 %** šancu, že pôjde z **W** na **S**. V obidvoch prípadoch bude vzdialený **1 km** od **W**, kde jeho prechádzka končí. V ďalšom kroku má z **N** aj **S** **50 %** šancu, že pôjde na **E** a **50 %** šancu, že sa vráti na **W** a jeho prechádzka skončí. Celkovo máme preto **4** možnosti, ako môže jeho prechádzka vyzerať po dvoch km: **WSE**, **WSW**, **WNE**, **WNW**. Vidíme, že v **2** zo **4** prípadov sa Bernt vráti na **W**, teda po **2 km** jeho prechádzka skončí s pravdepodobnosťou **50 %**.

V zvyšných dvoch prípadoch Bernt skončil na **E**. V ďalšom kroku, nech mu na minci padne čokoľvek, tak skončí určite na **S** alebo **N**. A my už z prvého kroku vieme, že odtiaľto má **50 %** šancu ísť späť na **E** a **50 %** šancu ísť na **W** a skončiť tak prechádzku. Preto je šanca, že skončí po **4 km**, **50 %** zo šance, že neskončí po **2 km**, teda **50 % · 50 % = 0,5 · 0,5 = 0,25 = 25 %**. V ďalšom kroku je opäť isté, že sa z **E** dostane na **S** alebo **N**, odkiaľ, ako už vieme, je šanca **50 %** že pôjde na **W**. Takže pravdepodobnosť, že jeho prechádzka skončí po ďalších **2 km** sa opäť zmenší o polovicu. A takto to bude fungovať vždy, takže pravdepodobnosť skončenia po **6 km** je **12,5 %**, po **8 km** zas **6,25 %**, atď.

Berntove prechádzky preto môžu mať hocijakú párnu dĺžku v kilometroch väčšiu alebo rovnú **2 km**. Najčastejšie, v **50 %** prípadoch, sa nachodí práve **2 km**. Navyše platí, že čím je prechádzka dlhšia, tým má menšiu šancu, že nastane. Konkrétne je šanca vždy o polovicu menšia ako pri prechádzke kratšej o **2 km**.