JSMF Žilina, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Gymnázium Veľká Okružná Žilina

SEZAM, školský rok 2008/09, vzorové riešenia 3. letnej série

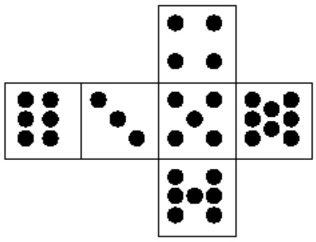
Milí riešitelia,
je tu koniec dobrodružstiev šerifky Molly a jej čerstvého zástupcu Willyho. Sme veľmi radi, že ste našim kovbojom z divokého Západu pomohli s matematickými problémami, ktoré ich pri dobrodružstvách stretli. Nemusíte však za SEZAMom smútiť, v septembri si vás určite nájdu zadania prvej zimnej série spolu s novými rozprávkovými hrdinami.

Dovtedy si opravte známky v škole (ak máte aké) a poriadne si užite leto. Tí z vás, ktorí si v obálke našli aj pozvánku na tábor, sa už môžu tešiť na 10 augustových dní plných hier, zábavy, a ako inak, matematiky... Ak ste pozvánku nedostali, alebo chcete, aby ste o rok boli lepší, pozorne si prečítajte tieto vzorové riešenia.

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`.

Veľa pekných prázdninových zážitkov vám za všetkých organizátorov praje Michal Prusák.

1. príklad *(opravovala Erika Trojáková)*



Nájdime najskôr prvú rýchlokocku so súčtom počtu bodiek na protiľahlých stenách 11. Keď si vypíšeme všetky dvojice prirodzených čísel, ktoré dávajú súčet 11, dostaneme týchto 5 dvojíc: 1+10, 2+9, 3+8, 4+7, 5+6. Vieme, že bodky na kockách majú tvoriť postupnosť prirodzených čísel. Z uvedených piatich dvojíc sa teda snažíme vybrať tri dvojice tak, aby čísla v nich nasledovali pekne po sebe. Veľmi rýchlo zistíme, že **toto pravidlo spĺňajú iba čísla 3, 4, 5, 6, 7, 8**. Stačí ich už len umiestniť na kocku tak, aby spĺňali pravidlo o súčte. Na obrázku je plánik jednej správnej rýchlokocky.

Podobne postupujme aj v prípade rýchlokocky so súčtom 20. Keď vypíšeme všetky dvojice so súčtom 20, dostaneme týchto 10 dvojíc: 1+19, 2+18, 3+17, 4+16, 5+15, 6+14, 7+13, 8+12, 9+11, 10+10. Teraz sa poďme pokúsiť vybrať z týchto dvojíc tri dvojice tak, aby tvorili postupnosť šiestich po sebe idúcich čísel. Dvojica 10+10 tam nemôže byť, lebo číslo 10 sa opakuje. Takže sa snažíme vyberať zo zostávajúcich čísel. Akonáhle však vyberieme akúkoľvek dvojicu, tak by tam museli byť aj všetky čísla medzi nimi (aby tvorili postupnosť). A keďže jedno z čísel každej zvyšnej dvojice je menšie ako 10 a druhé väčšie, tak tam musí byť aj 10. Ale my sme zistili, že 10 tam byť nemôže. Takže **rýchlokocku so súčtom 20 nevieme vyrobiť**.

2. príklad *(opravoval Peťo Novotný)*

Pozrime sa postupne na obe vety a skúmajme, ktorý z troch bratov (aj keď o Sandym zatiaľ nevieme, či existuje) mohol ktorú vetu povedať.

Prvú vetu **„Ahoj, ja som Sandy!“** určite nemohol povedať Sandy. Ten totiž vždy klame a táto veta by bola, keby ju povedal Sandy, pravdivá. Takže prvý Indián nie je Sandy. Z toho ale hneď máme, že prvý Indián klamal: nie je Sandy a predsa povedal, že je Sandy. A zároveň z toho máme, že aj druhý Indián klamal: povedal vetu **„Áno, je to Sandy.“** a my už vieme, že prvý Indián nie je Sandy.

Teda **obaja Indiáni klamali**. A to už sme skoro hotoví, lebo vieme, že Mandy a Tjuzdy nikdy neklamú naraz (v ten istý deň). Preto jeden z nich musí byť Sandy. A keďže hneď na začiatku sme vysvetlili, že prvý Indián nie je Sandy, **musí byť Sandy druhý Indián**.

Pre istotu skontrolujeme, či všetko sedí (zadanie by mohlo byť „chytákom“, že by nevyhovovala žiadna možnosť). Druhý Indián je Sandy, mal by preto klamať. A povedal o prvom Indiánovi vetu **„Áno, je to Sandy.“**, čo je v poriadku, lebo prvý Indián nie je Sandy, teda naozaj je to klamstvo. Prvý Indián povedal vetu **„Ahoj, ja som Sandy!“**, čo je klamstvo. Prvý Indián teda môže byť buď Mandy (ak je pondelok, streda alebo piatok), alebo Tjuzdy (ak je utorok, štvrtok alebo sobota). Čiže opísaná situácia naozaj mohla nastať. Dokonca vieme, že určite to nebolo v nedeľu.

Zistili sme, že Sandy existuje, je to druhý Indián, ktorého Molly stretla.

3. príklad *(opravovala Kačka Bachratá)*

Spôsobov ako vyriešiť úlohu bolo viac. My uvedieme jednoduchý, aj keď trochu pracný spôsob. Najprv si všimnime, že opravené rampy nebudú mať menej ako 10 metrov ani viac ako 48 metrov. Keby mali menej ako 10 metrov, tak by sme za skracovanie zaplatili viac ako pre rampy dĺžok 10, 10, 10, 10 metrov. Rovnaká úvaha platí aj pre rampy dlhšie ako 48 metrov. Ostatné možnosti si rozpíšeme:

dĺžky (v metroch)	cena (v dolároch)		dĺžky (v metroch)	cena (v dolároch)
$10, 10, 10, 10$	$0 + 500 + 900 + 3800 = 5200$		$15, 15, 15, 15$	$500 + 0 + 400 + 3300 = 4200$
$11, 11, 11, 11$	$100 + 400 + 800 + 3700 = 5000$		$16, 16, 16, 16$	$600 + 100 + 300 + 3200 = 4200$
$12, 12, 12, 12$	$200 + 300 + 700 + 3600 = 4800$		$17, 17, 17, 17$	$700 + 200 + 200 + 3100 = 4200$
$13, 13, 13, 13$	$300 + 200 + 600 + 3500 = 4600$		$18, 18, 18, 18$	$800 + 300 + 100 + 3000 = 4200$
$14, 14, 14, 14$	$400 + 100 + 500 + 3400 = 4400$		$19, 19, 19, 19$	$900 + 400 + 0 + 2900 = 4200$

dĺžky (v metroch)	cena (v dolároch)		dĺžky (v metroch)	cena (v dolároch)
$20, 20, 20, 20$	$1000 + 500 + 100 + 2800 = 4400$		$24, 24, 24, 24$	$1400 + 900 + 500 + 2400 = 5200$
$21, 21, 21, 21$	$1100 + 600 + 200 + 2700 = 4600$		$25, 25, 25, 25$	$1500 + 1000 + 600 + 2300 = 5400$
$22, 22, 22, 22$	$1200 + 700 + 300 + 2600 = 4800$		$26, 26, 26, 26$	$1600 + 1100 + 700 + 2200 = 5600$
$23, 23, 23, 23$	$1300 + 800 + 400 + 2500 = 5000$		$27, 27, 27, 27$	$1700 + 1200 + 800 + 2100 = 5800$

Na začiatku sme síce povedali, že vypočítame cenu až po situáciu 48, 48, 48, 48. Už teraz však vidíme, že v každej nasledujúcej situácii bude cena o 200 dolárov vyššia než v predchádzajúcej. Predĺženie troch rámp stojí 300 dolárov a na skrátení ušetríme 100 dolárov. Teda cena za celkovú úpravu narastie v každom riadku o 500 dolárov.

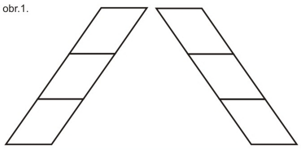
Najnižšia suma, ktorú je možné dosiahnuť, sa už nachádza v tabuľke. Stačí ju vyhľadať. Jej **hodnota je 4200 dolárov a dosiahneme ju, ak upravíme všetky rampy na dĺžku 15 metrov**. Rovnakú cenu dosiahneme, ak **budú rampy dlhé 16, 17, 18 alebo 19 metrov**.

4. príklad

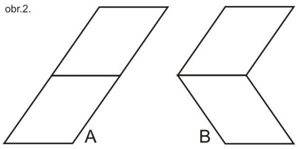
(opravovala Ika Bachratá)

Našou úlohou je zistiť, koľko je tvarovo rôznych odznakov. To sú také, ktoré sa nedajú na seba otočiť ani priložiť (tak, aby sa prekrývali a nič netrčalo). V zadaní nebolo napísane, či sa za otáčanie ráta aj preklápanie, teda či sú napríklad odznaky na obrázku 1 rôzne alebo rovnaké. Preto sa za správne riešenie považovala aj jedna aj druhá možnosť. Keď ste ale chvíľku preklápali a chvíľku zase nie, tak to už úplne správne nebolo. My si najskôr ukážeme riešenie, v ktorom budeme za rovnaké považovať aj odznaky, ktoré sa na seba dajú preklopiť. Nájsť všetky možné odznaky nie je ľahké. Ešte ťažšie je ubezpečiť sa, že už sú naozaj všetky. Preto musíme postupovať systematicky.

obr.1.



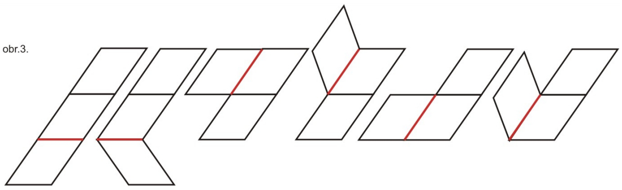
obr.2.



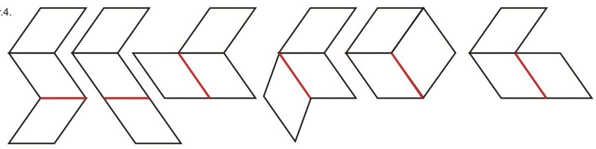
Najskôr si vezmeme len **dva kosoštvorce**. Tie sa dajú spojiť len dvoma spôsobmi kvôli tomu, že kosoštvorec je zo všetkých strán rovnaký. Záleží len na tom, či dáme rovnaké uhly k sebe alebo od seba (obrázok 2).

Poďme skúsiť pripojiť **tretí kosoštvorec**. Najskôr sa pozrime na útvar A, ktorý má 6 hrán. K tomuto útvaru môžeme pripojiť tretí kosoštvorec na šesť miest. Niektoré možnosti sú ale rovnaké, lebo sa na seba dajú otočiť alebo preklopiť. Totiž pripájaním k spodnej hrane dostaneme to isté ako pripájaním k vrchnej. Takisto je jedno, či pripájame k ľavej hornej alebo pravej dolnej hrane. Napokon dostaneme tie isté možnosti, keď pripájame k ľavej dolnej a pravej hornej hrane. Celkovo máme len tri rôzne miesta na pripojenie tretieho kosoštvorca. Na každom mieste ho ale vieme pripojiť dvoma spôsobmi, dostaneme **spolu $2 \cdot 3 = 6$ možností** nakreslených na obrázku 3. Ľahko sa dá skontrolovať, že všetky tieto možnosti sú rôzne.

obr.3.



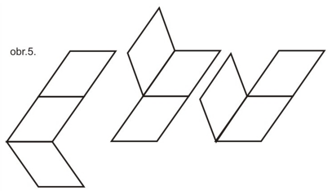
obr.4.



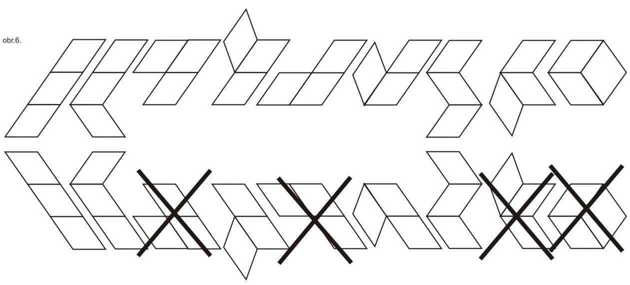
Teraz sa pozrime na útvar B. Tu sa dá spodná hrana preklopiť na vrchnú, ľavá dolná na ľavú hornú a pravá dolná na pravú hornú. Spolu máme opäť len tri rôzne miesta, kam sa dá priložiť tretí kosoštvorec. Na každé miesto sa dá zase priložiť dvoma rôznymi spôsobmi, čím dostaneme **6 ďalších možností** nakreslených na obrázku 4. Opäť sa dá ľahko skontrolovať, že sú všetky rôzne.

Musíme si ale dať pozor na odznaky, ktoré sme vyrobili pri útvare A aj pri útvare B. Tie sme totiž započítali dvakrát. Sú to tri odznaky nakreslené na obrázku 5. **Spolu preto máme $6 + 6 - 3 = 9$ tvarovo rôznych odznakov.**

obr.5.



obr.6.



Ak by sme odznaky, ktoré sa na seba dajú preklopiť, nepovažovali za rovnaké, ešte by nám nejaké možnosti pribudli. Nájdeme ich napríklad takto. Ku každému z deviatich odznakov, ktoré sme už našli, nakreslíme jeho preklopenú verziu (obrázok 6). Stačí už len vyškrtať tie odznaky, ktoré sa na dajú otočiť na nejaký iný odznak. **Dostaneme tak 14 tvarovo rôznych odznakov.**

Výsledky ankety o úlohách 3. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	5	11	7	1
najmenej sa páčila	3	3	2	16
najťažšia bola	3	2	3	17
najľahšia bola	5	16	3	0