JSMF Žilina, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Gymnázium Veľká Okružná Žilina

SEZAM, školský rok 2009/10, vzorové riešenia 1. letnej série

Milí naši riešitelia,
vonku sa pomaly roztápa už aj posledný sneh a už to začína vyzerať, že naozaj riešite letnú časť SEZAMu. Sme radi, že ste sa celkom úspešne popasovali s úlohami 1. letnej série. Ak ste nezískali veľa bodov, nezúfajte a nehádžte flintu do žita. Pred vami sú ešte dve série, ktoré môžu záverečné poradie úplne zamiešať.

Aby ste doma nemuseli robiť iba samé jarné upratovanie, posielame vám čerstvé zadania ďalšej letnej strašidelnej série. Ešte predtým, než sa do nej pustíte, prečítajte si tieto vzorové riešenia. Dozviete sa, ako nezopakovať chyby, ktoré ste možno urobili, a ak ste aj žiadnu chybu neurobili, možno sa dozviete nejaké nové spôsoby riešenia úloh.

Ak máte kamarátov alebo spolužiakov, ktorí by tiež radi riešili SEZAM, skúste im požičať zadania druhej série. Začať sa dá aj od druhej série a ak budú šikovní, aj s dvomi dobre zrátanými sériami sa im môže podariť dostať sa na letný tábor. Ďalej vás prosíme, aby ste si v poradí skontrolovali svoje údaje, ak sú niektoré chybné, dajte nám vedieť a opravíme ich.

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk.

Za organizátorov vám pekný začiatok jari a veľa úspechov želá Michal Prusák.

1. príklad *(opravoval Maťo Bachratý)*

Zo zadania vieme, že práve jeden údaj je klamstvo a zvyšné tri sú pravdivé. Rozoberme si postupne štyri prípady, v ktorých bude klamstvo postupne prvý, druhý, tretí a štvrtý údaj.

- Ak bude klamstvo prvý údaj, v skutočnosti bude hovoriť, že Blankytná jaskyňa je najväčšia alebo najmenšia. Vieme však, že zvyšné údaje sú pravdivé. Ľadová jaskyňa je preto najväčšia a Studená jaskyňa je najmenšia. Tým pádom Blankytná jaskyňa nemôže byť ani najväčšia, ani najmenšia. To odporuje tomu, že prvý údaj je klamstvo, **tento prípad nám preto nevyhovuje**.
- Ak bude klamstvo druhý údaj, bude pravdou to, že Kvapková jaskyňa je najmenšia. Zvyšné tri údaje sú pravdivé, takže najmenšia by mala byť aj Studená jaskyňa, čo si odporuje. Ani **tento prípad nevyhovuje zadaniu**.
- Ak bude klamstvo tretí údaj, bude v skutočnosti hovoriť, že Ľadová jaskyňa nie je najväčšia. Vďaka tomu, že zvyšné údaje sú pravdivé, Blankytná jaskyňa ani Studená jaskyňa nemôžu byť najväčšie. Najväčšia jaskyňa teda nutne musí byť Kvapková jaskyňa. Najmenšia jaskyňa je určite Studená jaskyňa. Blankytná a Ľadová jaskyňa budú druhá a tretia v poradí podľa veľkosti. Usporiadanie jaskýň podľa veľkosti teda môže byť buď **Kvapková, Ľadová, Blankytná, Studená** alebo **Kvapková, Blankytná, Ľadová, Studená**. Keď sa spätne pozrieme na všetky údaje v zadaní, zistíme, že obe tieto usporiadania jaskýň **vyhovujú zadaniu**. Nepravdivý je totiž práve jeden (tretí) údaj.
- Ešte nám zostáva možnosť, keď bude klamstvo štvrtý údaj. V skutočnosti bude potom tento údaj hovoriť, že Studená jaskyňa nie je najmenšia. Potom však z ostatných troch pravdivých údajov vidíme, že žiadna z jaskýň nemôže byť najmenšia. To však nemôže nastať, vždy je niektorá jaskyňa najmenšia. Ani tento **posledný prípad nevyhovuje zadaniu**.

Ak si to celé zhrnieme, zistili sme, že **tretí údaj je nepravdivý**, najväčšia jaskyňa je Kvapková, druhá a tretia najväčšia sú Ľadová a Blankytná jaskyňa (pričom ich poradie nevieme určiť) a najmenšia jaskyňa je Studená.

2. príklad *(opravovala Ika Bachratá)*

Úloha by sa dala riešiť tak, že budeme skúšať čísla postupne od jednotky, až kým nenarazíme na prvé číslo so siedmimi alebo viacerými spôsobmi rozdelenia. To by potom bolo naše hľadané najmenšie číslo. My ale najprv skúsime trocha porozmýšľať.

Poďme najskôr vymyslieť, ktoré čísla sa siedmimi spôsobmi určite rozdeliť nedajú. Počet kôpok nemôže byť väčší ako počet kameňov. Keď sa majú dať kamene rozdeliť na kôpky aspoň 7 spôsobmi, musí byť aspoň 7 čísel, ktoré nie sú väčšie ako počet kameňov. Prvé také číslo je 7, takže **kameňov musí byť aspoň sedem**.

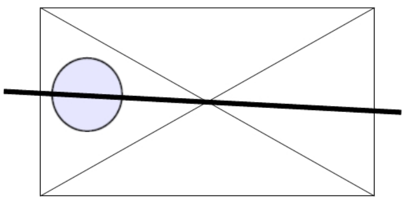
Skúsme rozmýšľať ďalej. Pozrime sa na čísla, ktoré majú iba dva spôsoby nakôpkovania. Buď na kôpky po jednom kameni alebo len na jednu kôpku (žiadny iný spôsob rozdelenia nemajú). Takýmto číslam sa hovorí *prvočísla*, sú to $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$ (je ich veľmi veľa). **Prvočísla to určite nebudú**, lebo keď ma číslo presne dva delitele, tak ich nemá sedem a viac.

Teraz už stačí vyskúšať oveľa menej čísel. Skúsme však rozmýšľať ešte ďalej. **Môžeme vylúčiť aj čísla, ktoré sú súčinom dvoch prvočísel.** Sú výsledkom násobenia prvočíslo·prvočíslo (napríklad 15 je súčinom dvoch prvočísel 3 a 5). Tie majú totiž vždy len štyri spôsoby rozdelenia. Buď na kôpky po jednom kameni, alebo na kôpky s toľkými kameňmi, koľko je prvé prvočíslo, alebo na kôpky s toľkými kameňmi, koľko je druhé prvočíslo, alebo na jednu veľkú kôpku. V prípade 15 to budú tieto štyri spôsoby: 15 kôpok, 3 kôpky, 5 kôpok a 1 kôpka. Vyskúšajte si to pre iný počet kameňov v tomto tvare (napríklad 35).

Dalo by sa ešte vymyslieť niekoľko ďalších zlepšovákov, na vyskúšanie nám už ale ostalo iba málo možných počtov kameňov. Začať skúšať stačí od sedmičky a prvočísla môžeme rovno vynechávať: 7 je prvočíslo, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ sa dá rozdeliť iba na 1, 2, 4, a 8 kôpok (čo je málo), $9 = 3 \cdot 3$ sa dá rozdeliť iba na 1, 3 a 9 kôpok (tiež málo). Ďalej $10 = 2 \cdot 5$ je súčin dvoch prvočísel a 11 je prvočíslo, pri týchto to bude tiež málo. Ďalšie číslo $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ sa dá rozdeliť iba na 1, 2, 3, 4, 6 a 12 kôpok, čo je spolu iba 6 spôsobov rozdelenia. Pokračujme ďalej: 13 je prvočíslo, $14 = 2 \cdot 7$ a $15 = 3 \cdot 5$ sú súčiny dvoch prvočísel. Takýmto postupným skúšaním prídeme až k počtu kameňov $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, ktorý sa dá rozdeliť na 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 a 24 kôpok. To je dokonca až 8 možných spôsobov rozdelenia. Keďže sme skúšali počty postupne od najmenších možných, môžeme si byť istí, že **24 je najmenšie číslo, ktoré sa dá rozdeliť na kôpky aspoň siedmimi spôsobmi** (dokonca až ôsmimi).

3. príklad

(opravoval Didi Hudec)



Deliaca čiara musí podľa zadania rozdeliť obdĺžnikovú sálu a kruhové jazierko na dve rovnako veľké časti. Pozrime sa najprv na kruh. Aby sme ho nejakou čiarou rozdelili na dve rovnaké časti, musí táto čiara prechádzať **stredom kruhu**. Totiž jediné čiary, ktoré rozdeľujú kruh napoly, sú jeho priemery.

Teraz sa pozrime na obdĺžnik. Ak ho chceme rozdeliť na dve rovnaké časti, musí deliaca čiara prechádzať **priesečníkom jeho uhlopriečok** (jeho „stredom"). Inakšie bude jedna časť určite väčšia a druhá menšia (skúste si to sami premyslieť).

Spojme teraz tieto dva body – stred kruhu a priesečník uhlopriečok obdĺžnika. Takto určite rozdelíme jazierko na dve rovnaké časti, keďže deliaca čiara prechádza jeho stredom. Otázne ešte je, či rozdelíme napoly aj neľadovú plochu (obdĺžnik okrem kruhu). Ak si odmyslíme jazierko, obdĺžnik rozdelíme napoly, keďže čiara prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok. No a v každej z týchto rovnakých častí je rovnako veľká ľadová plocha jazierka. Preto takto naozaj rozdelíme aj neľadovú plochu na dve rovnaké časti.

Tento postup môžeme použiť hocikedy, aj keď bude jazierko inakšej veľkosti a bude ležať na inom mieste v sále.

4. príklad

(opravoval Ondro Mikuláš)

Oliver a strašidlo začínajú vždy s jednou kryhou. Keď nejakú kryhu trafí Oliver, kryha sa rozdelí na 12 menších krýh. To značí, že **pribudne 11 nových krýh**. Keď trafí nejakú kryhu strašidlo, kryha sa rozdelí na 6 menších, teda **pribudne 5 nových krýh**. Skúsme tieto poznatky nejako využiť.

Pozrime sa na konkrétnu situáciu, ktorá mohla nastať. Prvýkrát trafilo strašidlo, potom dvakrát Oliver a na konci opäť strašidlo. Keď si to spočítame, vyjde nám, že na rybníku zostalo 33 krýh (vyskúšajte si to zrátať). Situáciu môžeme skrátene zapísať súčtom

$$1 + 5 + 11 + 11 + 5 = 33.$$

Píšeme to teda tak, že začíname s jednou kryhou, potom trafí strašidlo, teda pribudne 5 krýh. Potom trafí Oliver dvakrát po sebe, čím pribudne $11 + 11$ krýh. Nakoniec trafí opäť strašidlo. Môžeme si uvedomiť, že nezáleží na tom, ktorú kryhu trafil Oliver alebo strašidlo pri svojom hádzaní. Rovnako nezáleží na poradí, v ktorom Oliver a strašidlo hádzalo. Pre ten istý výsledný počet krýh môže existovať viacero takýchto zápisov. Dohodnime sa, že ľubovoľnú situáciu zapíšeme tak, že prvý sčítanec bude jednotka, potom nasleduje niekoľko pätiek (zásahy strašidla) a nakoniec niekoľko jedenástiek (zásahy Olivera). Naša predchádzajúca situácia bude zapísaná ako $1 + 5 + 5 + 11 + 11$.

Vráťme sa k pôvodnej úlohe. **Máme zistiť či vie Oliver a strašidlo získať každý počet krýh väčší ako 40.** Vyskúšajme si to pre najmenšie možné hodnoty od 41 po 50:

$$\begin{aligned}
41 &= 1+5+5+5+5+5+5+5+5\\
42 &= 1+5+5+5+5+5+5+11\\
43 &= 1+5+5+5+5+11+11\\
44 &= 1+5+5+11+11+11\\
45 &= 1+11+11+11+11\\
46 &= 1+5+5+5+5+5+5+5+5+5\\
47 &= 1+5+5+5+5+5+5+5+11\\
48 &= 1+5+5+5+5+5+11+11\\
49 &= 1+5+5+5+11+11+11\\
50 &= 1+5+11+11+11+11
\end{aligned}$$

Vyzerá to tak, že to pôjde vždy. Treba však ešte vymyslieť spôsob, ako deliť kryhy pre väčšie čísla ako 50. Všimnime si, že **pomocou strašidla vieme ľahko pričítavať číslo 10 k počtu krýh** na rybníku. Stačí, aby strašidlo trafilo dve kryhy. Teda ak vieme vyrobiť napríklad číslo 42, vieme vyrobiť aj čísla $52, 62, 72, \ldots$ (všetky čísla väčšie ako 42 a končiace cifrou 2). Podobne to ide aj pre ostatné cifry. My sme už zistili, že Oliver a strašidlo vedia vyrobiť počty krýh od 41 do 50 vrátane. Tieto počty obsahujú na mieste jednotiek všetky cifry od 0 po 9. **Vieme preto vyrobiť všetky čísla.** Skúste si to teraz poriadne premyslieť a až potom pokračujte v čítaní ďalej.

Keď dostaneme nejaké číslo, ktoré máme s Oliverom a strašidlom nahádzať, pozrieme sa, akou cifrou končí. Následne Oliver so strašidlom nahádžu prislúchajúci počet od 41 po 50 (podľa poslednej cifry). Teraz treba pridať (pomocou strašidla) už len nejaký násobok desiatich. Napríklad 150 krýh dostaneme týmto postupom tak, že najprv strašidlo s Oliverom nahádžu 50. Potom strašidlo trafí 20-krát, čím k 50-tim kryhám pridá $5 \cdot 20 = 100$ krýh. To je spolu $50 + 100 = 150$ krýh.

Výsledky ankety o úlohách 1. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	10	4	10	3
najmenej sa páčila	5	9	3	10
najťažšia bola	1	4	4	18
najľahšia bola	7	10	10	0