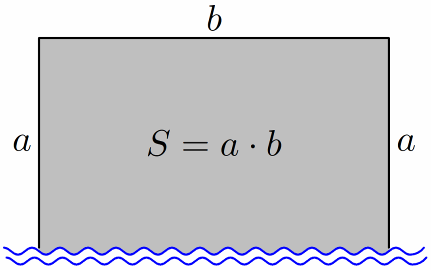
SEZAM, školský rok 2010/11, vzorové riešenia 2. letnej série

Milí riešitelia,
pred vami sú zadania poslednej letnej série tohtoročného SEZAMu. Príbeh panoša Athosa sa blíži k záveru. Je to aj vaša posledná šanca na získanie nejakých bodíkov. Ukazuje sa, že tohto roku sú úlohy ťažšie, a dôležitá je aj každá získaná polovica bodíka.
Oplatí sa o ne zabojovať, budete mať lepšiu pozíciu v poradí a budete sa môcť tešiť na letný tábor. Ešte predtým si prečítajte tieto vzorové riešenia, dozviete sa kde ste spravili prípadné chyby, a možno sa dozviete aj iné spôsoby ako sa dali úlohy vyriešiť.
Mimochodom, spomínaný letný tábor bude od 14. do 23. augusta. Naplánujte si svoje letné prázdniny tak, aby ste neminuli kopu zábavy, hier, matematiky, nových aj starých kamarátov, športu, výletov a všeličoho iného. Už teraz sa na vás tešíme.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 *(opravoval Peťo Novotný)*

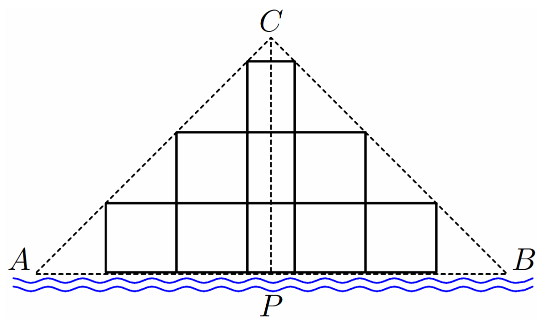


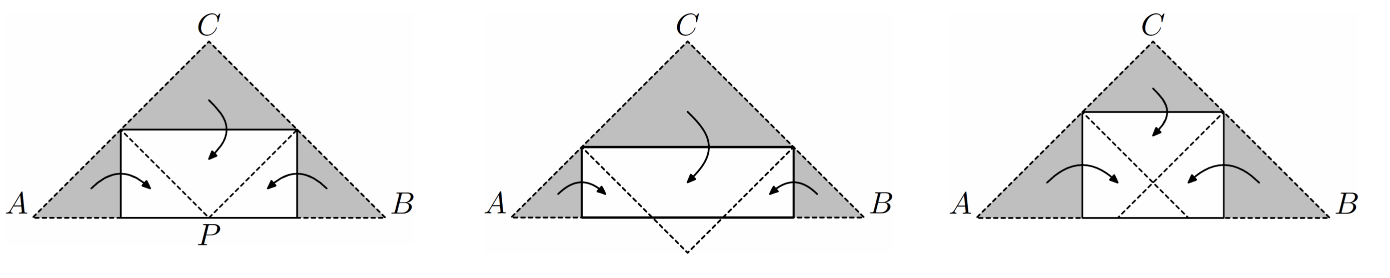
Celý plot má mať spolu 600 metrov a ohrada má mať tvar obdĺžnika. Ohradiť máme dve rovnaké strany kolmé na rieku (ich dĺžku označme a) a jednu stranu rovnobežnú s riekou (jej dĺžku označme b). Ak poznáme konkrétnu dĺžku a, ľahko dopočítame dĺžku b, pretože musí platiť $a + b + a = 600$. Potom už jednoducho dopočítame aj rozlohu ohrady, keďže tú tvorí obdĺžnik s obsahom $a{\cdot}b$. Takýmto postupom môžeme vypočítať rozlohu pre veľa rôznych hodnôt a, b (napríklad tak, ako je uvedené v tabuľke) a hľadať medzi výsledkami najväčšie číslo. Ako najväčšia hodnota sa javí 45000 m^2, ktorú dostaneme pre a = 150 m, b = 300 m.

a	b	rozloha
10	580	5800
50	500	25000
100	400	40000
120	360	43200
140	320	44800
150	**300**	**45000**
160	280	44800
180	240	43200
200	200	40000
250	100	25000
290	20	5800

Väčšina z Vás týmto zistením skončila. Postup má však jeden háčik: nemohli sme za hodnoty a, b vyskúšať úplne všetky možné čísla (rozmery ohrady totiž nemuseli byť len celé čísla, a teda možných hodnôt je nekonečne veľa). Takže nemáme *istotu*, že výsledok 45000 m^2 je naozaj najväčší možný. Aj keď skúsime dosadiť napr. a = 149,9 m, b = 300,2 m alebo a = 150,1 m, b = 299,8 m a vypočítame, že rozloha je v oboch prípadoch 44999,98 m^2, nie je to záruka, že pre iné hodnoty to tiež musí byť menej ako 45000 m^2. V skutočnosti sme zatiaľ dokonca nijako nevysvetlili ani to, prečo by rozloha nemohla byť väčšia aj pre nejaké hodnoty vzdialené od a = 150 m, napríklad niekde medzi a = 200 m až a = 250 m.
Pre správne vyriešenie úlohy teda potrebujeme vysvetliť, prečo je hodnota 45000 m^2, ktorú dostaneme pri rozmeroch 150 m × 300 m, najväčšia možná. Ukážeme jeden z možných postupov, ako sa to dalo spraviť. Je geometrický a nevyžaduje žiadne vedomosti navyše:

(*Podľa Jana Žárského*). Ak budeme kresliť všetky možné ohrady (obdĺžniky) do jedného obrázka tak, aby stred strany ležiacej pri rieke bol stále ten istý bod (označíme ho P), všimneme si zaujímavú vec: Vrcholy obdĺžnika, ktoré nie sú pri rieke, ležia vždy na odvesnách AC, BC pravouhlého rovnoramenného trojuholníka ABC, ktorého prepona AB má dĺžku 600 m a jej stredom je P (premyslite si, prečo je to tak). Chceme vlastne zistiť, ktorý z obdĺžnikov takto vpísaných do trojuholníka ABC má najväčší obsah. Ľahko si všimneme, že ak je základňa obdĺžnika pri rieke dlhá 300 m, tak obdĺžnik tvorí presne polovicu obsahu trojuholníka ABC. „Vyčnievajúce" časti trojuholníka sa totiž dajú do obdĺžnika presne „naskladať". Naopak, ak je základňa pri rieke dlhšia ako 300 m, tak po preklopení „hornej" vyčnievajúcej časti bude kúsok prečnievať do rieky, zatiaľ čo ak je kratšia ako 300 m, budú sa po preklopení navzájom prekrývať „bočné" vyčnievajúce časti. Čiže ak základňa nemá dĺžku 300 m, obsah obdĺžnika je *menší* ako polovica obsahu trojuholníka ABC. Maximálny obsah je teda vtedy, keď má základňa pri rieke dĺžku 300 m.

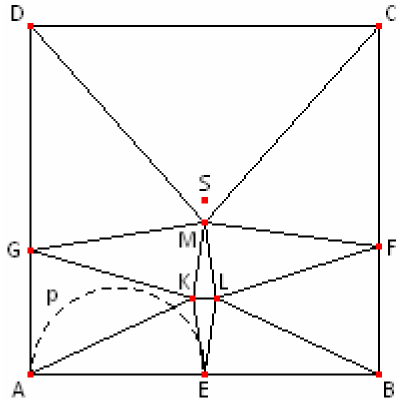




Príklad č. 2 *(opravoval Didi Hudec)*

V prvom kroku potrebujeme nájsť všetky druhé mocniny prirodzených čísel, ktoré majú všetky cifry navzájom rôzne a sú väčšie ako 100 (10^2) a menšie ako 1024 (32^2). To nie je žiadny problém a sú to čísla: 169, 196, 256, 289, 324, 361, 529, 576, 625, 729, 784, 841 a 961. Z nich musíme vybrať požadované trojice a to také, kde bude použitá každá cifra práve raz. Najskôr vyberieme tie cifry, ktoré sa vyskytujú v číslach najmenej krát. Vidíme, že cifra 3 sa nachádza iba v dvoch číslach: 324 a 361 a cifra 8 iba v troch číslach: 289, 784 a 841. To znamená, že potrebujeme vybrať z týchto dvoch skupín spolu 2 čísla, v ktorých bude použitých 6 rôznych cifier. Ak by sme vybrali číslo 324 tak by nám neostalo žiadne číslo s cifrou 8, lebo vo všetkých troch je 2 alebo 4 a tie už by boli použité. Musíme teda vybrať číslo 361. Teraz nám ostáva vybrať jedno číslo z dvojice 289 a 784 a to tak, aby sa z ostávajúcich troch cifier dala spraviť druhá mocnina čísla. Ak by sme použili 289 ostanú nám cifry 4, 5 a 7 a z nich sa nám nepodarí spraviť druhá mocnina. Ostáva nám teda vybrať čísla 361 a 784. Zo zvyšných 3 cifier 2, 5 a 9 vieme poskladať jedinú druhú mocninu z vyššie uvedených a to 529. Úloha má teda iba jedno riešenie. Jednotlivé látky mali plochy: 361, 529 a 784 dm^2.

Príklad č. 3 *(opravoval Miro Hudec)*



Najprv popíšem, ako som zostrojil tento obrázok a potom ukážem, že všetky trojuholníky sú ostrouhlé. Bod *E* je stred strany *AB*. Bod *S* je stred štvorca. Bod *M* leží na spojnici *ES*, kúsok "pod" *S*. p je polkružnica, ktorej stred leží v strede úsečky *AE*. *KL* je rovnobežná s *AB*, vzdialenosť bodu *K* od úsečky *ES* je rovnaká ako vzdialenosť bodu *L* od úsečky *ES* a bod *K* leží mimo polkruhu ohraničeného *AE* a *p*. Bod *G* umiestníme vhodne na *AD* tak, aby Δ*GKM* bol ostrouhlý (nedá sa to popísať tak pekne ako ostatné body, ak nechcem hovoviť presné vzdialenosti v mm, ale ide to). Bod *F* umiestníme podobne ako bod *G*, len bude ležať na strane *BC*. Následne povytváram trojuholníky, ako vidno na obrázku. To, že Δ sú ostrouhlé môžeme overit pohľadom. Ak to nepôjde, pozrieme sa ešte raz a pomôžeme si pri tom uhlomerom. Alebo môžeme použiť ešte jeden spôsob, ktorý ale vyžaduje trošku experimentovania. Konkrétne, narysujte si nejakú úsečku *XY*, spravte z jej stredu kružnicu *k* tak, aby prechádzala bodmi *X* a *Y*. Následne si v ľubovoľne zvoľte bod *Z* (ktorý neleží na priamke *XY*) a pozrite sa, aký bude uhol *XZY* ak bude bod *Z* ležať vnútri kružnice *k*, na kružnici *k* alebo mimo nej. Tento experiment zároveň vysvetľuje, prečo som pri konštrukcii bodu *K* použil polkruh *p*. Keby som do obrázku nakreslil polkružnicu nad každou stranou každého Δ, bolo by to neprehľadné, ale môžete si skúsiť týmto overiť ľubovoľný uhol.

Príklad č. 4 *(opravoval Mojo Majdiš)*

Ak by M bolo v slove MASLO ovca, tak by muselo byť ovca aj v slove MESTO. Avšak v slove MESTO rytieri netrafili ani jednu ovcu, takže M na prvej pozícii nemôže byť ovca. Ale ani baran, pretože v slove MASLO netrafili ani jedného barana. A keďže M nie je baran ani ovca, tak sa v hľadanom slove nenachádza. To isté platí pre písmená S a O. Vieme, že v slove MESTO rytieri trafili 2 barany a tiež vieme, že v hľadanom slove sa nenachádza M, S ani O. Z toho vyplýva, že 2 barany v slove MESTO sú E a T, takže E bude v hľadanom slove na druhej pozícii a T na štvrtej pozícii. Obdobne zistíme, že v hľadanom slove sa nachádzajú písmená A a L(zo slova MASLO). Keďže v slove ATHOS nie je ani jeden baran, tak A nemôže byť na prvej pozícii. A tiež nemôže byť na druhej a štvrtej pozícii – tam už sú E a T. Vieme, že v slove ZLATO je len jeden trafený baran a tým je T na štvrtej pozícii, a teda A nemôže byť ani na tretej pozícii. Vieme však, že A sa v hľadanom slove nachádza, a keďže nemôže byť na žiadnej z prvých štyroch pozícií, tak bude určite na piatej pozícii. V slove LIBRA je jeden trafený baran – písmeno A. Preto je písmeno L trafená ovca. L teda nemôže byť na prvej pozícii. Preto musí byť na tretej pozícii(ostatné sú už obsadené). Tiež si všimneme, že ostatné písmená zo slova LIBRA už nie sú baran ani ovca. Preto sa v hľadanom slove nenachádza I,B ani R. V slove SRDCE sú trafené dve ovce. Jedna z nich je E. Keďže vieme, že S a R sa v hľadanom slove nevyskytujú, tak druhá ovca je C alebo D. Z toho nám vyplývajú dve možné slová – DELTA a CELTA. Ľahko overíme, že obe tieto slová vyhovujú zadaniu.

Výsledky ankety o úlohách 2. série:

Úloha č.	**1**	**2**	**3**	**4**
najviac sa páčila	4	2	1	**8**
najmenej sa páčila	3	3	**6**	2
najťažšia bola	3	3	**6**	3
najľahšia bola	5	**6**	2	2

Ďakujeme všetkým tým, čo poctivo vypĺňajú a posielajú anketu. Veľmi nám to pomáha pri výbere úloh.