JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

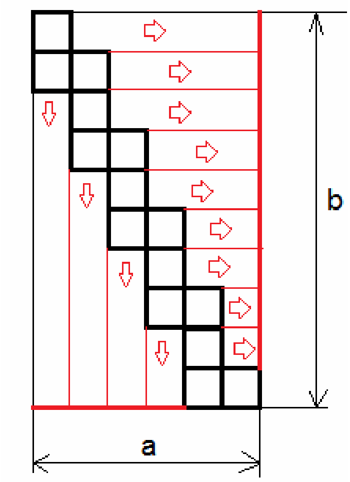
SEZAM, školský rok 2011/12, vzorové riešenia 2. letnej série

Milí riešitelia,
dostali sa k vám zadania poslednej letnej série tohtoročného SEZAMu. Príbeh kapitána Jeana a jeho lode sa blíži k záveru. Vám sa naskytá posledná šanca získať nejaké tie bodíky. Oplatí sa kvôli ním potrápiť, budete mať lepšiu pozíciu v poradí a budete sa môcť tešiť na letný tábor. Pred tým než sa pustíte do nových príkladov si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, dozviete sa kde ste spravili prípadné chyby, a možno sa dozviete aj iné spôsoby ako sa dali úlohy vyriešiť.
Spomínaný letný tábor bude od 12. do 21. augusta. Naplánujte si spolu so svojimi rodi4mi letné prázdniny tak, aby ste neminuli kopu zábavy, hier, matematiky, nových aj starých kamarátov, športu, výletov a všeličoho iného. Už teraz sa na vás tešíme.
Ešte by sme sa chceli poďakovať všetkým tým, čo vypĺňajú anketu. Veľmi nám to pomáha pri výbere úloh. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

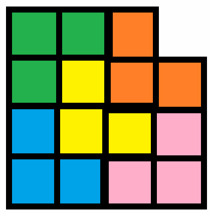
Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravoval Janči Jakubík*)

Skúsme sa pozrieť na to ako mohol vyzerať Korov záhon s obvodom 16 uhmov. Záhon je zložený z piatich plôch tvaru L pričom jedna plocha tvaru L má obvod 8 uhmov. Ak by tieto záhony neboli pospájané mali by spolu dokopy obvod 40 uhmov. Ako treba plochy tvaru L poskladať aby mali obvod 16 uhmov? Ak od 40 odčítame obvod záhonu, teda 16, dostaneme číslo 24, ktoré predstavuje počet stien ktoré treba spojiť. Ak spojíme dve plochy tvaru L jednou spoločnou stenou zbavíme sa hneď dvoch stien, pretože obvod takto spojených plôch tvaru L už nebude 16 ale 14. Z tohto nám vyplýva, že spoločných stien musí byť 24 : 2 = 12.



Ďalej vieme povedať, že obvod všetkých záhonov akéhokoľvek tvaru sa dá vypočítať ako obvod obdĺžnika, teda 2 x (*a*+*b*), kde *a* je šírka tohto záhonu a *b* je výška záhonu (pozri obr. vľavo).
Z toho nám vyplýva, že 16 = 2 x (*a*+*b*), a po vydelení dvoma 8 = *a*+*b*. Za *a* si neviem dosadiť číslo 1 pretože nevieme spraviť záhon ktorý by mal šírku 1. Skúsme si teda za *a* dosadiť číslo 2, potom *b* musí byť 8 - 2 = 6. Táto možnosť taktiež nesedí lebo ak *a* je 2, tak neviem spraviť záhon ktorý by mal výšku iba 6. Ak si za *a* dosadíme číslo 3 tak dostaneme že *b* musí byť 5. Po chvíľke skúšania a kreslenia prichádzame na to že ani záhon s rozmermi 3 x 5 nevieme nakresliť. Ostáva nám už iba posledná možnosť a to ak si za *a* dosadíme číslo 4 a za *b* tiež číslo 4.
Po pár zlých pokusoch dostávame záhon ktorého rozmery sú 4 x 4 a je v ňom 12 spojených stien malých útvarov tvaru L(obr. vpravo)



Teraz sa pozrime na Lorov záhon. Obvod Lorovho záhonu je 15.
Budeme postupovať ako pri Korovom záhone. 40 - 15 = 25 a 25 : 2 = 12, zvyšok 1. Počet spoločných stien v Lorovom záhone je teda 12 a jedna nám ostala. Ak spájam dva útvary tvaru L tak mi nesmie zostať žiadny zvyšok. Navyše obvod tohto záhonu sa dá vypočítať ako obvod obdĺžnika, teda 15 = 2 x (*a*+*b*). Ak podelíme dvomi dostaneme 7,5 = *a*+*b*. Teraz už jasne vidíme, že takýto záhon nemôže existovať pretože počítame s celými číslami a súčet dvoch celých čísiel (konkrétne *a*+*b*) nikdy nebude obsahovať desatinnú časť. Lorov záhon teda nemôže existovať.

Príklad č. 2 (*opravovala Baška Marečáková*)

Najskôr sa pozrime na to aké písmenká obsahuje dvojica tabuliek ONE a TWELVE:
ONE + TWELVE = 3 x E + T + W + L + V + O + N
Teraz sa pozrime na dvojicu tabuliek ELEVEN a TWO:
ELEVEN + TWO = 3 x E + T + W + L + V +O + N
Vidíme, že sa písmenká pri oboch dvojiciach tabuliek rovnajú. Platí teda že súčet cien tabuliek ONE a TWELVE sa rovná súčtu cien tabuliek ELEVEN a TWO. Z toho už ľahko zistíme že cena tabuľky TWELVE je 9 + 16 – 6 = 19. Teda tabuľka Lorovho domu stála 19 zlatých kamienkov. Keďže v zadaní nie je žiadne obmedzenie, ktoré by vravelo že rôzne písmenká majú rôznu cenu, tak sa bude dať vytvoriť aspoň jedna kombinácia, kedy kúpime tabuľku TWELVE za 19 zlatých (napr. O=1, N=2, E=3, T=3, W=5, L=2, V=3).
Komentár k riešeniam: Väčšina z vás začala vypisovať možnosti, ako by mohli stáť jednotlivé písmenká. Prvá chyba bola, že ste nezobrali do úvahy, že niektoré písmenko môže byť aj zadarmo. Počet všetkých možností sa dal značne znížiť tým, že ste dvojice písmen T,W a L,V brali ako jedno písmeno. Všimnite si totiž, že z dvojice T a W sa na každej z tabuliek vyskytujú buď obe písmená, alebo ani jedno, podobne je to aj s dvojicou L a V (skúste si uvedomiť, že vďaka tomu je jedno či takúto dvojicu berieme ako dve písmená, alebo jedno „dvojpísmeno").

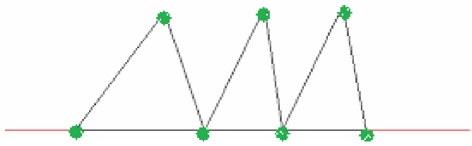
Príklad č. 3 (*opravoval Cimo Cimrák*)

Skúsme si zvoliť nejaké rozdelenie mincí do misiek. Keďže z misky A nám zoberie polovicu a z misky B až dve tretiny, je lepšie aby v A bolo viac ako v B. Podobne je to s miskou C, tam sa berú až tri štvrtiny, čo

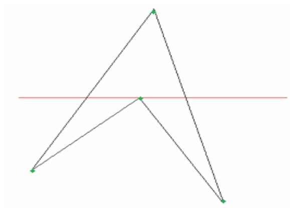
znamená že v miske C by malo byť najmenej. Tak si rozmiestnime mince napríklad nasledovne: A 25, B 15 a C 10 mincí. Podľa krupiérových pravidiel, z misky A by nám zobral 12 mincí – treba si uvedomiť, že daň sa zaokrúhľuje nadol. Z misky B by zobral 10 mincí a z C by zobral len 7 mincí. Krupiér by si v tomto prípade samozrejme zobral tých 12 mincí. Vidíme ale, že keď presunieme nejaké mince z misky A do C, tak počty sa nám vyrovnávajú a najväčšie číslo, ktoré nám berie krupiér, sa zmenšuje. Popresune 4 mincí z A do C tam budú takéto počty: A 21, B15 a C14. V tomto prípade by krupiér bral z každej misky 10 mincí.
Dá sa to ešte vylepšiť? Keby mal krupiér brať z A, B aj C len 9 mincí, mohlo by ich v A byť najviac 19, v B najviac 14 a v C najviac 13. To je dokopy ale len 46. Takže daň nemôže byť 9 a lepšie riešenie ako 10 už neexistuje.
Ešte ale ostáva otázka, či nejaké iné rozmiestnenie mincí nevedie ku rovnakému výsledku. Aby krupiér bral zo všetkých misiek najviac 10 mincí, musí byť v A 21 alebo menej mincí, v B 16 alebo menej mincí a v C 14 alebo menej mincí. To nám umožňuje ešte takéto rozmiestnenia: A 21, B 16, C 13 a A 20, B 16, C 14. Dokopy sú teda tri rôzne riešenia.

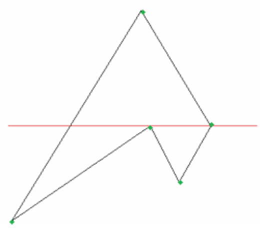
Príklad č. 4 *(opravovala Denisa Múthová)*

Močiar má mať tvar mnohouholníka.
Pomocou lávky - priamky (v tomto príklade berieme lávku ako priamku a neriešime jej hrúbku) máme rozdeliť mnohouholník na tri trojuholníky (a nič navyše). Chceme zistiť koľko vrcholov môže mať taký mnohouholník.
Najmenší počet vrcholov o ktorom sa dá uvažovať sú tri (aby to bol mnohouholník). Močiar však nemôže byť trojuholník lebo pomocou jednej priamky žiaden trojuholník nevieme rozdeliť na tri časti.
Keďže lávka má rozdeliť močiar na tri trojuholníky, tak dva z nich sa musia nachádzať na jednej strane lávky a tretí trojuholník na opačnej strane. Ak by totiž boli všetky tri trojuholníky na jednej strane, močiar by sme pomocou lávky nerozdelili - už na začiatku by bol rozdelený a teda by netvoril mnohouholník ale tri trojuholníky spojené vrcholmi (pozri obr. vpravo - červená priamka je lávka, zelenou sú označené vrcholy)

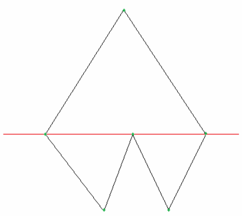


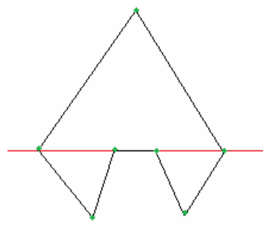
Takže na jednej strane sú dva trojuholníky a na druhej jednej. Aby sme dokázali mnohouholník rozdeliť na 3 časti, musí byť nekonvexný (obsahovať uhol, ktorý je medzi 180°a 360°).



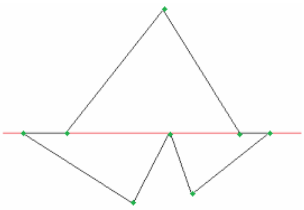


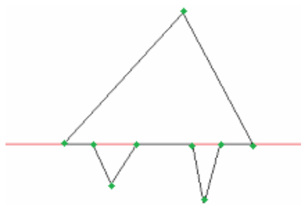
Na prvom obrázku vľavo vidíme ako sa dá rozdeliť štvoruholník. Päťuholníkový močiar môžeme vytvoriť tak, že zalomíme jednu z dlhších strán štvoruholníkového močiara (prvý obrázok vpravo).
V šesťuholníkovom močiari zalomíme aj druhú z dlhších strán (druhý obrázok vľavo).
V sedemuholníkovom močiari sa napríklad dva menšie trojuholníky nemusia dotýkať – druhý obrázok vpravo (sú aj iné možnosti ako môže sedemuholníkový močiar vyzerať).





Osemuholníkový močiar môže vyzerať tak, že sa dva menšie trojuholníky dotýkajú, a ich dve strany, na ktorých leží priamka sú väčšie ako strana veľkého trojuholníka, ktorá leží na priamke (posledný obrázok vľavo).
Po rozdelení deväťuholníkového močiara by sa dva menšie trojuholníky ani nemohli spolu dotýkať, ani by nemohli mať spoločný vrchol s väčším (posledný obrázok vpravo)
Desať a viac vrcholov už močiar nemôže mať, pretože ak sa má pomocou jednej priamky rozdeliť na tri trojuholníky, tak maximálne môže mať 3 x 3 = 9 vrcholov. To je všetko. ☺





Výsledky ankety o úlohách 2. série:

Úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	2	20	7	5
najmenej sa páčila	10	4	5	3
najťažšia bola	7	4	9	2
najľahšia bola	1	7	3	13