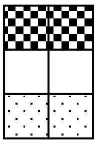
SEZAM, školský rok 2011/12, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí riešitelia,
sme veľmi radi, že nám došla kopa pekných a zaujímavých riešení problémov z ďalekej sústavy Alfa Centauri. Ak sa chcete dozvedieť, ako ste sa mohli vyvarovať niektorým chybám, alebo zistiť ako ináč sa dali úlohy riešiť, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia. Spolu s nimi k vám prišla aj druhá séria s novými príhodami kapitána Piknika.
Dbajte na poctivé vypisovanie hlavičiek a skúste nezabudnúť poslať spolu so sériou aj spiatočnú obálku. Taktiež si prosím skontrolujte svoje údaje vo výsledkovej listine, a ak by niečo nesedlo, tak nám to dajte spolu s druhou sérou vedieť.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravovala Erika Trojáková)



Našou úlohou je dopísať čísla do tabuľky tak, aby bol súčet v každom štvorci 2x2 rovnaký. Takýchto štvorcov 2x2 je v tabuľke 9 a niektoré sa navzájom prekrývajú. Vezmime teraz takú dvojicu štvorcov, ktoré sa prekrývajú v dvoch políčkach (napríklad tak ako na obrázku vľavo). Keďže tieto dva štvorce rozmerov 2x2 sa prekrývajú v bielej časti, tak aby v nich bol rovnaký súčet, musí platiť pravidlo: V štvorčekovaných krajných „dvojpolíčkach“ je rovnaký súčet ako v bodkovaných krajných „dvojpolíčkach“ (premyslite si to).
Vezmime šesť políčok, ktoré sú znázornené na obrázku 1. Na základe pravidla vieme, že súčet v krajných „dvojpolíčkach” musí byť rovnaký a teda 6+2 = 10 + ***a***, čiže ***a*** = -2. Skúsme doplniť ďalšie číslo do jedného zo šiestich vyznačených políčok na druhom obrázku. Opäť musí platiť, že 1+8 = ***a*** + 10, teda ***a***=-1. Využitím toho istého pravidla vieme, že na treťom obrázku musí byť ***a***= -5.

	1	8	
6		***a***	2
2		10	
	6		5

Obr.1

	1	8	
6		**-2**	2
2	***a***	10	
	6		5

Obr.2

	1	8	
6		**-2**	2
2	**-1**	10	
	6	***a***	5

Obr.3

	1	8	
6		**-2**	2
2	**-1**	10	
	6	**-5**	5

Obr.4

Keď sa pozrieme na štvorec vyznačený na obrázku 4, tak vidíme, že v ňom už sú doplnené všetky štyri čísla. Čiže súčet v štvorci musí byť 10+(-1)+6+(-5)=10. Teraz už poznáme súčet v štvorci a jednoduchým dopĺňaním súčtu do 10 doplníme zvyšné chýbajúce čísla. Kapitán teda mal doplniť čísla do tabuľky tak, ako vidíte na obrázku vpravo. Ľahko sa presvedčíme, že uvedená tabuľka spĺňa požiadavky zadania.

0	1	8	**2**
6	**3**	-	2
2	-	1	**0**
3	6	-	5

Príklad č. 2 (opravovala Lenka Trojákova)

Máme tri planéty X, Y, Z obiehajúce okolo hviezd A, B, C. Vieme, že každá planéta je o 25 HP ťažšia ako hviezda, okolo ktorej obieha. Ďalej zo zadania vyplývajú nasledujúce rovnosti:
(1) A – 21 = X **(2)** Y + A = 68 **(3)** Z + C = 72 **(4)** X + Y + Z + A + B + C = 211
Z prvej rovnosti môžeme usúdiť, že planéta X neobieha okolo hviezdy A, lebo je ľahšia len o 21 HP, nie o 25 HP. Tiež vieme, že každá hviezda je o 25 ťažšia, ako jej planéta.
Teda (X + X + 25) + (Y + Y + 25) + (Z + Z + 25) = 211 – v zátvorke je vždy planéta so svojou hviezdou. Z toho po uprataní dostaneme, že X + X + Y + Y + Z + Z = 136 a teda X + Y + Z = 68, označme si túto rovnosť ako **(5)**.
Keď spojíme rovnice **(2)** a **(5)**, tak dostaneme Y + A = 68 = X + Y + Z. Na základe **(1)** platí, že A = X + 21, a teda Y + (X + 21) = X + Y + Z (= 68). Odčítame od oboch strán rovnice (X + Y) a dostaneme Z = 21. Na základe **(3)** vieme teraz povedať, že C = 72 – Z = 51. Všimnime si rozdiel C – Z. C – Z = 51 – 21 = 30 a teda Z neobieha okolo C (rozdiel hmotností nie je 25).
Pozrime sa ešte na súčet rovníc **(2)** a **(3)**. Keď sčítame ľavé a pravé strany, tak dostaneme A + C + Y + Z =140. Na ľavej strane nám do súčtu hmotností všetkých vesmírnych telies chýba B + X,
na pravej strane 211 – 140 = 71. Teda B + X = 71 – túto rovnicu si označíme ako **(6)**.

Poďme sa teraz pozrieť na to, aké možnosti „spárovania“ planét s hviezdami nám ostali. Vieme už, že X nemôže obiehať okolo A a tiež, že Z neobieha okolo C. Ostali nám teda nasledujúce tri možnosti:

1. X obieha okolo B, Z obieha okolo A, Y obieha okolo C
2. X obieha okoloc C, Z obieha okolo A, Y obieha okolo B
3. X obieha okolo C, Y obieha okolo A, Z obieha okolo B

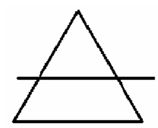
Poďme si ich jednotlivo rozobrať.

1. V tomto prípade by teda Y obiehala okolo C, teda Y = C – 25 = 26. Z by obiehala okolo A a teda A = 21 + 25 = 46. Z **(1)** vieme, že X = A – 21 = 46 - 21 = 25. Okolo X by obiehala B, preto B = X + 25 = 25 + 25 = 50. Použijeme rovnosť **(6)**: X + B = 71. V našom prípade však X + B = 50 + 25 = 75. Vieme však, že 71 ≠ 75, a teda toto usporiadanie planét a hviezd nevyhovuje zadaniu.
2. Teraz by Z obiehala okolo A, teda A = Z + 25 = 21 + 25 = 46. Ďalej X by obiehala okolo C, teda X = C - 25 = 51 - 25 = 26. Z **(1)** vieme, že platí A-21=X, čo však v našom prípade nie je pravda, a teda ani takéto usporiadanie nevyhovuje zadaniu.
3. Z by obiehala okolo B, teda B = Z + 25 = 21 + 25 = 46. Rovnako, ako v predchádzajúcom prípade, by X obiehala okolo C a teda X = 26. Opäť použijeme rovnosť **(6)**: X + B = 71. V tomto prípade však X + B = 46 + 26 = 72. Dostávame teda, že 71=72, čo zjavne neplatí a teda ani táto možnosť nie je správna.

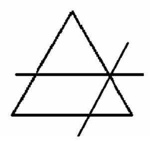
Žiadne ďalšie prípustné možnosti usporiadania planét X, Y, Z a hviezd A, B, C neexistujú, teda neexistuje systém vesmírnych telies usporiadaný tak, aby spĺňal podmienky zadania. Nevieme určiť ani hmotnosti jednotlivých telies. Môžeme akurát smutne skonštatovať, že v Encyklopédii je chyba.

<u>Poznámka opravovateľa:</u> *Chybička sa natlačila nie len do Encyklopédie, ale aj do zadania tohto príkladu. Plánované zadanie malo mať jednoznačný výsledok. Takto ste všetci riešili iný príklad, ako sme chceli, ktorý bol kúsok ťažší ako pôvodne plánovaný. No popasovali ste sa s ním veľmi pekne... Zvedavci sa na správne zadanie môžu opýtať na sústredení :)*

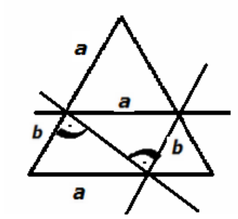
Príklad č. 3 (*opravovala Kaťa Jasenčáková****)***



Solárny panel máme rozdeliť na 2 rovnostranné trojuholníky a 2 časti, z ktorých sa dá rovnostranný trojuholník zložiť. Keďže má solárny panel tvar rovnostranného trojuholníka, tak rezom rovnobežným s niektorou z jeho strán(napríklad so spodnou), dostaneme rovnostranný trojuholník a ostane nám rovnoramenný lichobežník so s dvoma uhlami veľkosti 60° a dvoma uhlami veľkosti 120°(obr. vpravo).

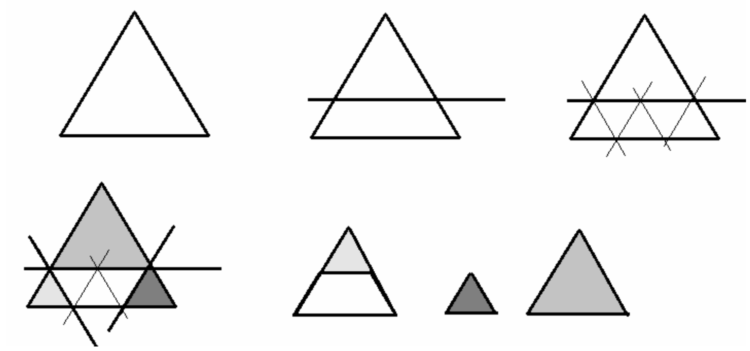


Teraz rezom rovnobežným s jedným z ramien lichobežníka získame jeden rovnostranný trojuholník a jeden kosodĺžnik s dvoma uhlami veľkosti 60° a dvoma uhlami veľkosti 120°(obr. vľavo). Kosodĺžnik potrebujeme rozrezať tak, aby sme z častí na ktoré ho rozrežeme, vedeli poskladať rovnostranný trojuholník, teda aby všetky jeho uhly mali 60°.



Dva uhly v kosodĺžniku majú 60°, takže je výhodné ich nerozdeliť. Skúsme teda kosodĺžnik rozrezať pozdĺž kratšej uhlopriečky. Vzniknú nám dva zhodné trojuholníky, s jedným uhlom veľkosti 60°. Aby sme tieto trojuholníky mohli spojiť do rovnostranného trojuholníka, musia byť uhly zvýraznené na obrázku vpravo pravé. Navyše dĺžky strán vyrobeného trojuholníka budú *a,a,b+b* a keďže má byť rovnostranný, tak musí platiť *a*=2 x *b*. Keďže prvý trojuholník, ktorý sme odrezali je rovnostranný, tak aj jeho zvyšné strany budú mať dĺžku *a*. Vidíme teda, že prvý rez delí trojuholník nutne v pomere *b* ku *a*, teda *b* ku 2*b*, teda 1 ku 2.

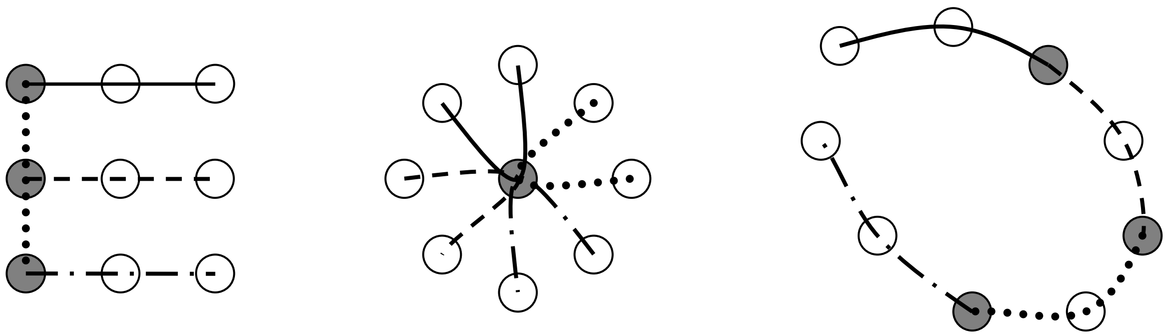
Sú aj ďalšie spôsoby ako sa dal panel rozdeliť. Napríklad odrežeme 1. trojuholník, ktorý bude mať strany dlhú 2/3 dĺžky strany solárneho panela. Ostane nám lichobežník. Ten si môžeme pomyselne rozdeliť na 5 rovnostranných trojuholníkov so stranou dlhou veľkosti ramena lichobežníka. Jeden z týchto trojuholníkov bude 2. rovnostranným trojuholníkom, ktorý sme chceli odrezať z panela a tretí takýto trojuholník získame spojením jedného z týchto trojuholníkov s tromi, ktoré vytvárajú menší lichobežník (ako na obrázku).



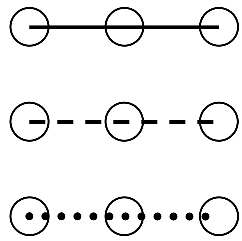
Príklad č. 4 (*opravoval Peťo Novotný****)***

Ak správne prečítame všetky podmienky, ktoré musí sieť liniek spĺňať, nie je ťažké nakresliť viacero rôznych plánov sietí obsahujúcich 4 linky. Planéty pritom môžeme rozložiť akokoľvek (do štvorca, na priamku, na obvod kruhu, ...), lebo nie je dôležité, kde sa planéty nachádzajú, ale iba to, ktoré tri planéty sú spojené príslušnou linkou.

Na obrázku sú tri vyhovujúce schémy so štyrmi linkami a určite sami objavíte ďalšie. Lepšie by bolo jednotlivé linky odlišovať rôznymi farbami (ako to pekne urobila aj väčšina riešiteľov), my sa v čiernobielej tlačenej verzii musíme uspokojiť s iným typom čiary pre každú linku (plná, čiarkovaná, bodkovaná a bodkočiarkovaná). Planéty znázorňujeme krúžkami, pričom planéty, na ktorých sa dá prestupovať medzi linkami, sú vyplnené sivou farbou.



Úlohou bolo určiť, koľko najmenej liniek treba zaviesť. Zatiaľ sme ukázali, že 4 linky na to stačia. Pre plný počet bodov musíme ešte zdôvodniť, prečo menší počet liniek nestačí. To je však celkom ľahké: Povedzme, že by sme mali k dispozícii iba 3 linky. Keďže na každej linke sú tri planéty, vieme pomocou troch liniek pokryť maximálne 9 planét (3·3 = 9) – to však len v prípade, že žiadne dve linky nebudú mať spoločnú planétu (ako na obrázku vpravo). Pri takom zavedení liniek sa samozrejme nebude dať dostať z každej planéty na každú. Pri každom inom zavedení troch liniek (ak budeme chcieť, aby sa dalo medzi linkami prestupovať) zasa nedokážeme pokryť všetkých 9 planét, teda tiež nesplníme požiadavky zo zadania.



Tri linky preto nestačia, menej liniek už vonkoncom nie, čiže na splnenie požiadaviek treba aspoň 4 linky.

Výsledky ankety o úlohách 2. série:

Úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila				
najmenej sa páčila				
najťažšia bola				
najľahšia bola				