SEZAM, školský rok 2012/13, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí riešitelia,
zvieratká z lesa sa veľmi potešili vaším riešeniam a dúfajú, že im pomôžete aj s ich ďalšími problémami. Ak si chcete predtým, než sa pustíte do úloh druhej zimnej série, rozcvičiť svoje matematické bunky, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia.
Chceme Vás ešte poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali hlavičku, posielali riešenia na zvlášť papieroch a každý poriadne podpísali. Zvlášť nás upozornite, ak máte v poradí uvedený niektorý nesprávny údaj. Značne nám to pomôže pri organizácii.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na našej vynovenej stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravovala Katka Kmeťová a Baška Marečáková*)

Asi každý si hneď po prečítaní zadania predstaví alebo ešte lepšie zoberie do ruky hodinky. Tak ako to vlastne tie ručičky behajú? Minútová ručička obehne ciferník za 1 hodinu práve raz. Zato hodinová ručička prejde za hodinu 1/12 ciferníka - celý ciferník jej trvá 12 hodín. Každú hodinu sa preto stretnú práve raz, pričom pri stretnutí minútová ručička vždy predbieha hodinovú ručičku. Po 9:00 sa preto prvý krát predbehali niekedy po 9 a pred 10 hodinou a druhý raz niekedy po 10 a pre 11 hodinou. Tretí krát sa prekryli niekedy po 11:00. Malá ručička sa hýbe od 11 k 12, veľká robí koliesko od 12 do 12. Obom ich manéver trvá hodinu – na konci hodiny sa stretnú a budú na 12 hodine. **Ježko teda vstal presne o polnoci**.

Príklad č. 2 (*opravovala Kaťa Jasenčáková*)

Zo zadania vieme o obdĺžnikovom ihrisku dve informácie: súčet dĺžok troch strán ihriska je 55 metrov a jedna strana je o 8 metrov dlhšia ako druhá.
Dôležité je uvedomiť si, že nevieme, ktoré 3 strany žaba odmerala. Môžu nastať až dve možnosti. Buď odmerala obe dlhšie strany obdĺžnika a jednu kratšiu alebo obe kratšie a jednu dlhšiu.
Pozrime sa najprv na prvú možnosť. Označme si dĺžku ***kratšej*** strany ako ***k*** a dĺžku ***dlhšej*** hrany ako ***d***. Vieme, že súčet dĺžok dvoch ***dlhších*** strán a jednej ***kratšej*** je dokopy 55 metrov, teda ***d*** + ***d*** + ***k*** = 55 metrov. Navyše vieme, že ***dlhšia*** strana je o 8 metrov dlhšia ako ***kratšia*** strana, teda ***d*** = ***k*** + 8 metrov. Teraz môžeme využiť to, že ***dlhšiu*** stranu vieme vyjadriť pomocou ***kratšej***:

$$\begin{aligned} d + d + k &= 55 \\ (k + 8) + (k + 8) + k &= 55 \\ k + k + k + 8 + 8 &= 55 \\ 3 \cdot k + 16 &= 55 \quad /-16 \\ 3 \cdot k &= 39 \quad /\div 3 \\ k &= 13 \text{ metrov} \end{aligned}$$

Teda ***kratšia*** strana má ***k*** = 13 metrov. ***Dlhšia*** strana má o osem metrov viac, čo je 13 + 8 = 21 metrov. Obvod obdĺžnika teda bude 13 + 13 + 21 + 21 = 68 metrov.

Ostáva nám druhá možnosť, kedy žaba odmerala obe kratšie strany a jednu dlhšiu medzi nimi. Opäť si označme dĺžku ***kratšej*** strany ako ***k*** a dĺžku ***dlhšej*** hrany ako ***d***. Opäť platí, že ***dlhšia*** strana je o 8 metrov dlhšia od ***kratšej***, a ďalej vieme, že súčet dĺžok dvoch ***kratších*** strán a jednej ***dlhšej*** strany je dokopy 55 metrov. Podobne ako v predošlom prípade vieme dorátať dĺžku ***kratšej*** strany:

$$\begin{aligned} k + k + d &= 55 \\ k + k + (k + 8) &= 55 \\ k + k + k + 8 &= 55 \\ 3 \cdot k + 8 &= 55 \quad /-8 \\ 3 \cdot k &= 47 \end{aligned}$$

Tu ste mnohí nepokračovali, lebo ste povedali, že 47 nie je deliteľné číslom 3. V zadaní však nebolo napísané, že žaba vie merať len celé metre, a meter dlhá čiara sa dá určite rozdeliť aj na 3 rovnaké časti. Poďme teda doriešiť aj tento prípad.
Kratšia strana má 47/3 metra. Ak chceme môžeme si to vyjadriť aj krajšie. Tretina zo 47 metrov je to isté, ako keď sčítame tretinu zo 45 metrov a tretinu z dvoch metrov, čo je dokopy 15 metrov a dve tretiny metra.
Čiže dĺžka ***kratšej*** strany je ***k* = 15 + 2/3** metra. ***Dlhšia*** strana má o osem metrov viac, čo je ***d*** = 15 + 2/3 + 8 = **23 + 2/3** metra. Obvod ihriska teda bude 15 + 2/3 + 15 + 2/3 + 23 + 2/3 + 23 + 2/3 = 78+2/3 metra.
Obvod ihriska nevieme zistiť naisto, vieme však povedať, že je to môže len 68 metrov alebo 78 + 2/3 metra.

Príklad č. 3 (opravovali Baška Marečáková a Aďa Santrová)

Sme veľmi radi, že do riešenia tohto príkladu ste sa pustili skoro všetci. Väčšina z Vás prišla na správne riešenie alebo ste mali len malú chybu. Teraz si povieme, ako sa dal tento príklad riešiť.
Jedna možnosť je vypísať si všetky čísla, ktoré ďateľ zjedol a spočítať ich. Takéto riešenie je samozrejme správne (ak na nič pri vypisovaní nezabudneme a ani nič nevypíšeme navyše), zato však veľmi prácne. Skúsime si teda ukázať iné riešenie, ktoré nám nezaberie toľko papiera.
Najskôr sa pozrime na čísla od 100 po 199. Ak niektoré z týchto čísiel ďateľ zjedol, tak určite nie kvôli cifre na mieste stoviek (táto cifra je vždy 1, nám však vadia cifry 3,5 a 7). Preto ak niektoré číslo od 100 do 199 zjedol, tak určite zjedol aj číslo od neho o 100 menšie (tieto dve čísla sa líšia iba na mieste stoviek, kde však určite nie je cifra 3, 5 ani 7). Podobne ak zjedol nejaké číslo od 0 do 99, tak zjedol aj číslo od neho o sto väčšie (toto číslo obsahuje všetky cifry pôvodného čísla a navyše cifru 1 na miest stoviek, ak teda pôvodné číslo obsahovalo niektorú z cifier 3,5 a 7, tak ju bude obsahovať aj nové číslo).
Zjedené čísla od 0 do 99 budú teda presne tie isté čísla, ako zjedené čísla od 100 po 199, len zväčšené o sto (3,5,7,13,... - 103,105,107,113,...). Teraz nám teda stačí zrátať zjedené čísla od 0 po 99 a vynásobiť ich počet dvoma, čím dostaneme počet zjedených čísiel od 0 po 199. No a keďže 200 ďateľ určite nezjedol, tak vlastne dostaneme počet všetkých zjedených čísiel. Poďme teda zistiť koľko zjedených čísiel bude v prvej stovke:
Na mieste desiatok sa cifra 3 nachádza v desiatich číslach (30, 31, ..., 39). Podobne cifra 5 tiež v desiatich číslach (50, ..., 59) a cifra 7 tiež v desiatich číslach (70, ..., 79). Týchto 30 čísel teda ďateľ istotne zjedol. Zostali nám teda čísla, ktoré majú najviac dve cifry a navyše na mieste desiatok už určite nemajú žiadnu z cifier 3, 5 ani 7. Ak teda ďateľ zjedol ešte nejaké číslo, tak muselo mať cifru 3, 5 alebo 7 na mieste jednotiek.
V každej desiatke sa nachádza práve jedno číslo končiace cifrou 3, práve jedno končiace cifrou 5 a práve jedno končiace cifrou 7. Čiže z každej desiatky by mal ďateľ zjesť ešte tri čísla . Od 0 po 99 je týchto desiatok 10, no tri z nich už sú celé zjedené. Čiže nám zostalo 7 desiatok a v každej z nich tri čísla obsahujúce na mieste jednotiek cifru 3, 5 alebo 7. Týchto 7 · 3 = 21 čísiel teda ďateľ tiež určite zjedol. Nikde inde už žiadna z cifier 3,5 a 7 nemôže byť, teda z prvej stovky (od 0 po 99) zjedol vrabec presne 30 + 21 = 51 čísiel.
Z druhej stovky ich teda zjedol tiež 51. Takže ďateľ spolu zjedol 102 čísel. Keďže čísiel bolo dokopy 201, tak nezjedených ostalo iba 201 – 102 = 99.

Ďatľovi zostala **menej ako polovica** zo všetkých pôvodných doštičiek.

Príklad č. 4 (opravovala Denisa Múthová)

Vašou úlohou bolo pomôcť jazvecovi doplniť tabuľku. Má rozmery 5x5 štvorčekov, z ktorých je 5 zafarbených na čierno a nepoužívajú sa. Zvyšných 20 treba doplniť tak, aby pre každú takú päticu čísel, že z každého riadku a z každého stĺpca v nej bude práve jedno číslo platilo, že súčet takejto pätice čísel má byť vždy rovnaký.
Najskôr si označíme zatiaľ nevyplnené políčka písmenkami abecedy (a, b, c, d, e, f, g, h, ch, i, j), ako na obrázku vpravo.

0	a	b	c	4
d		3	2	e
f				9
g	8	5		h
6	ch	7	i	j

Na začiatku skúsme vybrať ***päticu*** len zo zadaných čísiel, aby sme zistili jazvecove šťastné číslo. Vyberme z tretieho riadku (jediné) číslo 9. Z prvého riadku potom môžeme vybrať už 0. Z posledného riadku potom zvýši len možnosť 7. A tým pádom z predposledného 8 a druhého 2. Jazvecovo šťastné číslo je teda 0 + 2 + 9 + 8 + 7 = 26.
Teraz stačí doplniť tabuľku tak, aby všetky súčty boli 26. Tak sa do toho pusťme. Vždy sa pokúsime nájsť ***päticu***, v ktorej bude hľadané číslo a okrem neho čo najviac známych čísiel

Hľadáme:	Pätica:	Výsledok:
a	6,5,9,2,a	a = 26 – 6 – 5 – 9 – 2 = 4
b	6,8,9,2,b	b = 26 – 6 – 8 – 9 – 2 = 1
c	6,8,9,3,c	c = 26 – 6 – 8 – 9 – 3 = 0
d	7,8,9,d,c	d = 26 – 7 – 8 – 9 – 0 = 2
e	7,8,f,e,c	e = 26 – 7 – 8 – f – 0 = 11 - f
f	7,8,f,2,4	f = 26 – 7 – 8 – 2 – 4 = 5, teda e = 11 – 5 = 6
g	7,g,9,2,a	g = 26 – 7 – 9 – 2 – a = 4
h	7,h,f,2,a	h = 26 – 7 – f – 2 – a = 8
ch	ch,5,9,d,c	ch = 26 – 5 – 9 – d – c = 10
i	i,g,9,3,a	i = 26 – g – 9 – 3 – a = 6
j	j,8,f,3,0	j = 26 – 8 – f – 3 – 0 = 10

8	**5**
ch	**7**

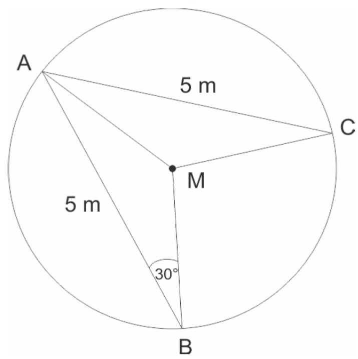
Výsledná tabuľka vyzerá takto:

0	4	1	0	4
2		3	2	6
5				9
4	8	5		8
6	10	7	6	10

Dostane jazvec vždy tú istú tabuľku? Áno**,** dostane. Prečo? Všetky čísla sme dopĺňali postupne a jednoznačne, takže tabuľka musí vyzerať presne tak ako na obrázku vľavo.

Tabuľka sa dala vypĺňať aj pomocou iného triku (zopár z vás naňho prišlo): po bližšom skúmaní si môžete všimnúť, že čísla, ktoré stoja **do kríža** oproti sebe (ako na obrázku), dávajú vždy rovnaký súčet ako dvojica druhá dvojica čísiel oproti sebe (ch + 5 = 8 +7). Skúste si premyslieť, prečo to tak je.

Príklad č. 5 (opravoval Janči Jakubík)



Väčšina z vás príklad riešila podobným spôsobom a tento spôsob riešenia si aj uvedieme.
Kedže body A, B, C ležia na kružnici a bod M je stred tejto kružnice musí platiť:
$|AM| = |BM| = |CM| = \textit{polomer kružnice (jazierka)}$
Kedže o trojuholníku ABM vieme, že má dve rovnaké strany, môžeme o ňom povedať, že je rovnoramenný. O rovnoramenných trojuholníkoch platí, že ich uhly pri základni (základňa je v našom prípade AB) sú rovnako veľké. Teda platí:
$|\sphericalangle MBA| = |\sphericalangle MAB| = 30°$
O každom trojuholníku, a teda aj trojuholníku ABM vieme, že súčet jeho vnútorných uhlov je spolu 180°. Vieme si preto zistiť veľkosť uhla BMA:
$|\sphericalangle BMA| = 180° - 2 \times (30°) = 120°$
Dva trojuholníky sú zhodné pokiaľ sa dĺžky ich strán rovnajú (veta sss). Z tohto vieme teda usúdiť, že trojuholník ABM je zhodný s trojuholníkom CAM. Teda všetko čo platí pre trojuholník ABM platí aj pre trojuholník CAM:
$|\sphericalangle MBA| = |\sphericalangle MAC| = 30°$
$|\sphericalangle MAB| = |\sphericalangle MCA| = 30°$
$|\sphericalangle BMA| = |\sphericalangle AMC| = 120°$
O plnom uhle vieme, že má 360°. Uhol BMC si teda vieme vypočítať takto:
$|\sphericalangle BMC| = 360° - |\sphericalangle BMA| - |\sphericalangle AMC| = 120°$
Všimnime si, že trojuholník BCM je tiež rovnoramenný ($|AM| = |BM| = |CM|$) a uhol, ktorý zviera medzi svojimi ramenami je 120°. Toto isté platí aj pre trojuholníky ABM a CAM. Teda teraz už vieme, že trojuholníky ABM, CAM, BCM sú zhodné podľa vety sus (strana, uhol medzi nimi zovretý, strana).

Ak sú teda všetky tri trojuholníky zhodné bude platiť aj:
$|AB| = |AC| = |BC|$
Vzdialenosť medzi kamienkami B a C je taká istá ako medzi kamienkami A a C aj A a B, a teda 5 metrov.

Príklad č. 6 (*opravoval Hynek Bachratý*)
Príklad bol naozaj ťažký a uznanie patrí všetkým, ktorí sa pustili do jeho riešenia, aj keď sa im nepodarilo vyriešiť ho na plný počet bodov.
V zadaní sme Vás navádzali, aby ste rozmýšľali o prvom alebo poslednom mravcovi. Skúsme to najskôr od konca.
Ak bol posledný mravec pravdovravec, keď skákal, bol na palube len on, a teda 0 klamárov. Musel preto po pravde povedať „na palube je párny počet klamárov" (nula je párne číslo: je to násobok dvojky, 0 cukríkov môžete rozdeliť dvom ľuďom tak, že obaja majú rovnako.). Ak bol posledný mravec klamár, na palube bolo v tom okamžiku 1, teda nepárny počet klamárov. Klamár ale musí klamať, preto tiež povedal „na palube je párny počet klamárov".
V každom prípade teda posledná veta znie „na palube je párny počet klamárov". Keďže prvá bola „na palube je nepárny počet klamárov", dokopy musel odznieť párny počet viet, a počet všetkých mravcov - parašutistov na vážke bol párny.
Aj keď vieme, čo povedal posledný parašutista, stále nevieme, či bol klamár alebo pravdovravec. To sa dá zistiť tak, že preberieme možnosti pre predposledného parašutistu, o ktorom už naisto vieme, že povedal „na palube je nepárny počet klamárov". Takto môžeme postupovať „odzadu" ďalej. Miesto toho ale urobíme inú úvahu.
Môžu za sebou zoskočiť dvaja pravdovravci? Keďže ich tvrdenia sa striedajú, o počte klamárov povedali rozdielne veci (jeden „pár" a druhý „nepár"). Zároveň ale zoskočením prvého z nich sa počet klamárov nezmenil, a ako pravdovravci by o nich mali povedať to isté. Povedať naraz rozdielne aj tie isté tvrdenia sa nedá, preto táto situácia nemohla nastať.
Podobne sa dá zistiť, že po klamárovi nemôže zoskočiť pravdovravec. Klamár o ich počte klamal, preto keď povedal „pár", v skutočnosti ich bol nepár. Po jeho zoskoku sa ale ich počet zmenil na pár, a pravdovravec po ňom preto mal povedať „pár". To by ale po sebe zazneli dve rovnaké vety, čo sa nemôže stať. Podobne ak klamár povie „nepár", bol ich v skutočnosti pár, po jeho zoskoku sa počet klamárov zmení na nepár a „nepár" by mal povedať aj pravdovravec, čo sa tiež nesmie.
Teraz teda vieme, že počet parašutistov bol párny, a ich poradie mohlo byť PKK...KK alebo KK..K.K. Tieto možnosti sme zatiaľ nevylúčili a dá sa ukázať, že naozaj mohli nastať.
To urobili aj tí riešitelia, ktorí začínali od prvého parašutistu. Vieme o ňom, že povedal „na palube je nepárny počet klamárov".
Ak to bol klamár, v skutočnosti bol klamárov párny počet. Po jeho zoskoku sa počet klamárov zmenil na nepárny. Keďže druhý parašutista povedal vetu „na palube je párny počet klamárov" klamal aj on, a teda to bol tiež klamár. Keď skočil, počet klamárov sa zmenil späť na pár, aj tretí mravec klamal. Takto to bude pokračovať, a všetky mravce sú teda klamári. A keďže klamárov je párny počet, aj všetkých mravcov je pár.
Ak bol prvý mravec pravdovravec, klamárov je naozaj nepár. Po jeho zoskoku sa počet klamárov nezmenil. Druhý mravec ale povedal "pár" a teda je klamár. Jeho zoskokom sa ale počet klamárov zmenil, preto klame aj tretí mravec a aj všetci ďalší, ako v prechádzajúcom prípade. Okrem prvého sú teda všetci klamári, a keďže tých je nepár, spolu s prvým je všetkých párny počet.
Oboma spôsobmi sme sa teda dostali k rovnakej odpovedi**. Mravcov na vážke bol určite párny počet. Prvý mohol byť pravdovravec alebo klamár, všetci ostatní, a teda aj posledný, boli určite klamári.**