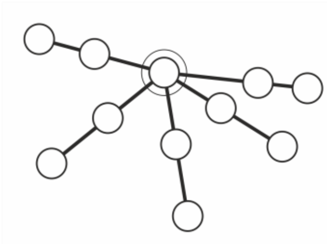
SEZAM, školský rok 2012/13, vzorové riešenia 3. zimnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou končí aj zimná časť tohtoročného SEZAMU. Zvieratká sa s vami až do jari lúčia. Najšikovnejších z vás čaká zimné sústredenie v Patrovci (pri Trenčíne), ktoré bude v termíne od 14. do 17. marca. Skôr než sa pustíte do vypĺňania návratky, ešte si prečítajte tieto vzorové riešenia.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravoval Hynek Bachratý)



Úlohou bolo rozmiestniť čísla od 1 po 11 do kruhových komôrok tak, aby ich súčet v každej trojici od stredovej po krajnú komôrku bol rovnaký. Potrebujeme teda získať 5 rovnakých súčtov z troch čísel, napríklad 1+10+11= 2 + 9 + 11 = ... Prostredné číslo aj ale rovnaké vo všetkých súčtoch. Ak si ho „odmyslíme", musia dávať 5 rovnakých súčtov aj dvojice čísel na koncoch chodbičiek. K tomu môžeme použiť všetky čísla okrem prostredného. Keďže máme dostať 5 rovnakých súčtov, ich celkový súčet musí byť deliteľný piatimi. Súčet všetkých čísel od 1 do 11 je 66. Ak od 66 odpočítame stredové číslo, musíme dostať násobok 5. To sa dá len 3 spôsobmi: 66 – 1 = 65 = 5 x 13, 66 – 6 = 60 = 5 x 12 a 66 – 11 = 55 = 5 x 11.
Môžeme teda do prostriedku dať číslo **1** a za zvyšných čísiel urobiť 5 dvojíc so súčtom 13, čo sa nám aj podarí: **2+11,3+10,4+9,5+8,6+7**. Tieto čísla sa dajú rozmiestniť do zvyšných chodbičiek viac spôsobmi, my sme sa ale pýtali hlavne na to, čo môže dať Denisa do stredu.
Druhá možnosť je dať do stredu **6** a dorobiť dvojice so súčtom 12: **1+11,2+10,3+9,4+8,5+7**.
Poslední možnosť je dať do stredu **11** a dvojice budú mať súčet 11: **1+10,2+9,3+8,4+7,5+6**.
<u>Toto sú správne riešenia, a tiež sme vysvetlili, že iné číslo do stredu Denisa určite dať nemôže.</u>

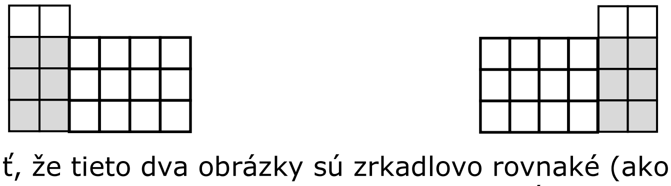
Príklad č. 2 (opravovala Lenka Trojaková)

Máme 6 rôznych obdĺžnikov, ktoré postupne prikladáme k sebe stranami s rovnakou dĺžkou. Vezmime najskôr dva najmenšie obdĺžniky. Máme štyri možnosti, ako ich rozostaviť.

A

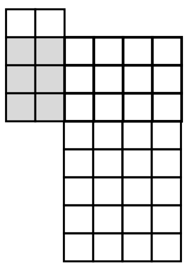
Môžeme si všimnúť, že otočením týchto útvarov sa obvod nijako nezmenil. Útvary, ktoré vieme dostať jeden z druhého otočením, budeme považovať za rovnaké. Spraví to riešenie príkladu prehľadnejšie. Ako východiskovú pozíciu budeme mať odteraz útvar **A**.
Poďme pridať ďalší obdĺžnik. Máme dve možnosti, ako to spraviť. (Pridaný obdĺžnik je vyšrafovaný)

B

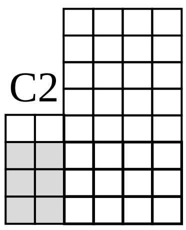


Môžeme si všimnúť, že tieto dva obrázky sú zrkadlovo rovnaké (akoby sme dali medzi ne zvislé zrkadlo) a majú rovnaký obvod. Nesmieme však zabudnúť, že zrkadlá môžeme mať dvoch druhov – zvislé a vodorovné. Keď to spojíme so štyrmi otočeniami, máme pre útvar **B** spolu 8 možností, ako ho nakresliť -každé otočenie môžeme ešte preklopiť podľa dvoch zrkadiel (skúste týchto 8 možností nájsť!). Opäť si príklad zjednodušíme a budeme ďalej pracovať iba s útvarom **B**.
Pridáme obdĺžnik 4cm x 5cm k útvaru **B**. Vieme to spraviť dvomi spôsobmi a dostaneme útvary s rôznymi obvodmi:

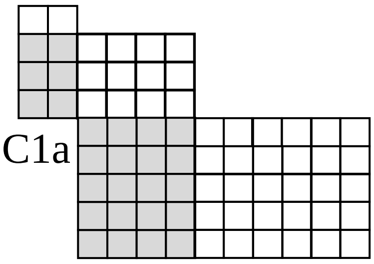
C1

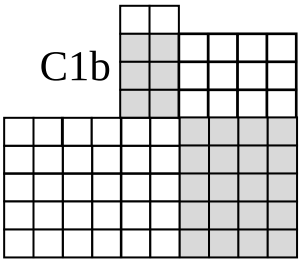


C2

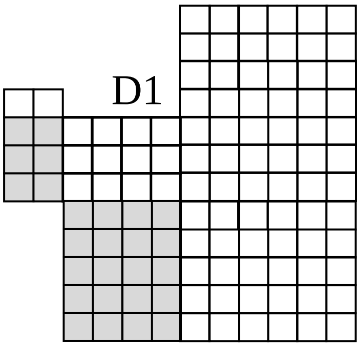


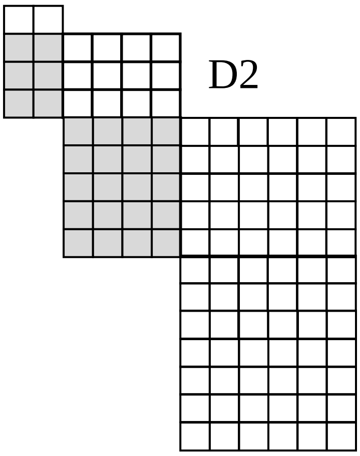
Najskôr zistíme, aké rôzne útvary vieme získať z útvaru **C1**. Obdĺžnik 5x6 vieme pridať opäť dvomi spôsobmi:

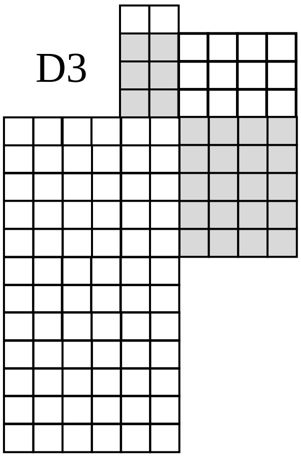




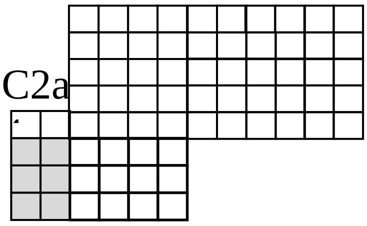
K **C1a** vieme pridať posledný obdĺžnik 6x7 tiež dvomi spôsobmi (dostaneme **D1** a **D2**), k **C1b** vieme pridať posledný obdĺžnik len jedným spôsobom tak, aby sa obdĺžniky neprekrývali (útvar **D3**). Obvody týchto troch útvarov sú O(**D1**) = 50 cm, O(**D2**) =56 cm, O(**D3**) = 52 cm.

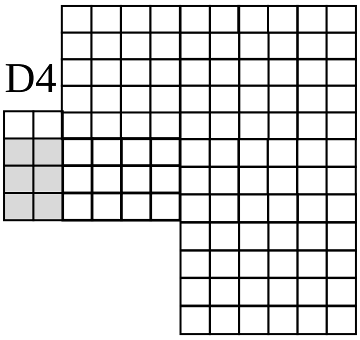


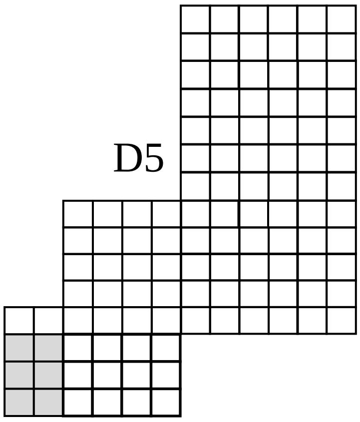




Ostáva nám zistiť, aké útvary vieme dostať z útvaru **C2**. Obdĺžnik 5x6 vieme priložiť len jedným spôsobom – dostaneme **C2a**.







K tomuto útvaru vieme posledný obdĺžnik 6x7opäť priložiť dvomi spôsobmi a dostávame útvary **D4** a **D5** s obvodmi O(**D4**)= 48 cm, O(**D5**)= 54 cm.
Keďže sme <u>v každom kroku vyčerpali všetky možnosti</u> pre uloženie ďalšieho obdĺžnika, neexistuje už žiadny ďalší. Je teda 5 základných útvarov D1, D2, D3, D4 a D5 s obvodmi 50, 56, 52, 48 a 54 cm. Každý z týchto útvarov vieme zobraziť ôsmimi spôsobmi, takže keď nepovažujeme otočenia a zrkadlenia obrázku za totožné, máme 40 útvarov s obvodmi ako základných 5 útvarov, pričom každý obvod sa opakuje 8 krát.

Príklad č. 3 (*opravoval Mojo Majdiš*)

Označme si našich päť čísel *a, b, c, d, e*. Podľa zadania má platiť $a + b + c < 0$. Keď teraz k $a + b + c$ prirátame d, tak dostaneme číslo väčšie než nula (vieme, že $a + b + c + d > 0$) . Ak by bolo $d = 0$, tak by výraz $a + b + c + d$ bol rovný výrazu $a + b + c$, ktorý je ale menší do nula. Takže d nemôže byť nula. Ak by bolo d záporné, tak je $a + b + c + d$ dokonca menšie než $a + b + c$, a teda menšie než nula, čo zasa nesedí (chceme aby bolo $a + b + c + d$ kladné). Neostáva nám teda iná možnosť než tá, že $d > 0$. Podobne $b + c + d < 0$ a $b + c + d + e < 0$, z čoho zase vieme odvodiť, že $e > 0$. Posledné dve čísla teda musia byť kladné. Tieto úvahy môžeme zopakovať aj „zrkadlovo", pre prvé dve čísla, a vyšlo by nám, že $a > 0$ aj $b > 0$. Aby sa nám vôbec podarilo dostať nejaké záporné súčty, prostredné číslo c potom nutne musí byť záporné. Pätica čísel teda **musí** byť tvaru kladné, kladné, záporne, kladné a kladné číslo.

Z nerovníc $a+b+c<0$, $b+c+d<0$, $c+d+e<0$ ešte vyplývajú vzťahy $a+b<|c|$, $b+d<|c|$, $d+e<|c|$. A z nerovníc $a+b+c+d>0$, $b+c+d+e>0$ dostávame $a+b+d>|c|$, $b+d+e>|c|$. Teda ak by sme si od c odmysleli znamienko, musí byť c väčšie ako každý súčet dvojíc $a+b$, $b+d$, $d+e$ a zároveň menšie ako každý súčet trojíc $a+b+d$, $b+d+e$. Preto najväčší zo súčtov dvojíc musí byť aspoň o dva menší ako najmenší zo súčtov trojíc.
Všetky pätice čísel spĺňajúce uvedené podmienky budú riešením našej úlohy. Takých pätíc je nekonečne veľa. Môžete napríklad zobrať každú typu $a,(a+1),(-2a-6),(a+2),(a+3)$ (pre a aspoň 5). Aj takýchto typov je ale viac.

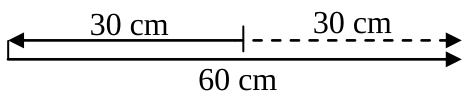
Príklad č. 4 (*opravovala Kačka Bachratá****)***

Problém, ktorý ste riešili v tejto úlohe bol, či KOCKOBUS pri 20 jazdách bez zľavy získa navyše aspoň 10 eur na nové stierače. Táto úloha sa nedá vyriešiť tak, že povieme, že KOCKOBUS zarobí aspoň 10 eur. Alebo že nezarobí. Pokusom, alebo nejakými úvahami sa môžeme utvrdiť v tom, že je veľká šanca, alebo **veľká pravdepodobnosť, že KOCKOBUS tých 10 eur nezarobí**. Napriek tomu sa môže stať, že KOCKOBUS aspoň 10 eur zarobí. Asi piati spomedzi riešiteľov pri svojom pokuse s 20 jazdami hádzali kockami tak, že zarobili aspoň 10 eur. To neznamená, že to urobili zle. Len im vyšiel menej pravdepodobný výsledok. Tak ako je málo pravdepodobné, že hodíte tri krát po sebe šestku. Ale stať sa to môže.
Niektorí sa však pomýlili a zľavu dávali aj mravčekom, ktorí na dvoch kockách hodili výsledok (2,2), (3,3), (4,4), (5,5). Za to už som body strhla.
Teraz napíšem niekoľko rozumných úvah, ktoré ste urobili pri riešení úlohy.
Najmenej môže KOCKOBUS zarobiť 0 eur, najviac 120.
Pravdepodobnejšie však budú výsledky bližšie k priemeru. Pri jednej jazde pocestuje priemerne 3,5 mravca (nebojte sa, nebudeme ich krájať na polovicu), teda pri 20 jazdách priemerne 70 mravcov. Ich skutočný počet bude niekedy viac, niekedy menej, ale veľmi pravdepodobne niekde medzi 40 až 100 mravcami. Keby ich aj cestovalo okolo 100, zľavu dostane len malá časť z nich. Teoreticky by to mala byť 1/18, teda asi 5,5 mravca. Teda niekde medzi 4 a 8 mravcami, teda pri 100 mravcoch by mal KOCKOBUS ušetriť niečo medzi 4 až 8 euro. Ak bude mravcov menej ako 100, aj ušetrených eur by malo byť menej ako 4 až 8.
Niektorí z vás navrhli, že pravdepodobnosť zľavy nie je 1/18, ale 2/21. Myslím si, že to tak nie je, ale možno sa mýlim. Takže ak niekto viete vysvetliť, prečo by to malo byť 2/21 a niekto iný, prečo by to malo byť 1/18, tak môžeme na sústredení urobiť veľký pokus a zistiť, podľa akej teórie sa riadia skutočné kocky.
<u>Predpoveď pre KOCKOBUS: 10 zliav pri 20 jazdách je veľmi nepravdepodobný výsledok.</u>

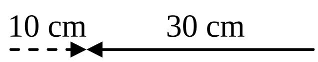
Príklad č. 5 (*opravoval Peťo Novotný****)***

Úloha sa dá úspešne vyriešiť rôznymi spôsobmi, od komplikovaných rovníc zahŕňajúcich rýchlosti, dráhy a časy (z ktorých napokon riešenie nejako „vylezie“), cez jednoduchšie rovnice zahŕňajúce len prejdené dráhy, až po riešenia úvahou bez použitia akýchkoľvek rovníc (len s využitím obrázka). Všetky tieto riešenia majú spoločné, že sa osobitne pozrieme na prvú časť (keď sa Kaiči vracal na koniec kolóny) a osobitne na druhú časť (keď Kaiči išiel opäť dopredu na začiatok kolóny) a z oboch týchto častí získame informácie, ktorých spojením už vieme dĺžku kolóny určiť.

Riešenie, ktoré tu uvedieme, je inšpirované riešením Pavla Mela. Je prekvapujúco elegantné a krátke. Od ostatných postupov sa líši tým, že neuvažuje jednotlivé časti pohybu osobitne, ale najskôr sa pozrie na celý pohyb „naraz“.



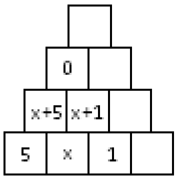
Chrobák Kaiči prešiel 30 cm smerom dozadu a potom 60 cm smerom dopredu. Spolu teda prešiel 90 cm. Koľko za ten istý čas prešli mravce? Stačí sa pozrieť na prvého mravca kolóny – ten sa nachádza o 30 cm ďalej ako v momente, keď Kaiči začal svoju púť smerom dozadu na koniec kolóny (60 – 30 = 30). Takže kým Kaiči prešiel 90 cm, mravce prešli 30 cm, čiže Kaiči sa pohyboval 3-krát rýchlejšie.



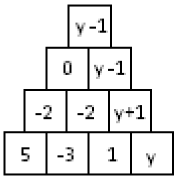
S touto informáciou už ľahko určíme dĺžku kolóny – stačí sa pozrieť napr. na prvú časť pohybu. Dĺžka kolóny je na začiatku vzdialenosťou Kaičiho od posledného mravca. Kaiči prešiel smerom dozadu 30 cm, posledný mravec mu išiel oproti tretinovou rýchlosťou, čiže prešiel 10 cm.

<u>Kolóna má teda dĺžku 30 cm + 10 cm = 40 cm.</u>

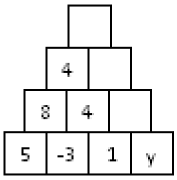
Príklad č. 6 (*opravoval Miro Hudec*)



Začnime so sčítavacou pyramídou, pretože je tam toho viac vyplneného. Ak na kocke medzi 5 a 1 bude číslo x, tak potom v druhom riadku dostaneme čísla 5 + x a 1 + x a ich sčítaním 0. Takže 6 + 2x = 0, úpravou dostaneme x = – 3. Toto môžeme doplniť do obidvoch pyramíd a následne dopočítať ďalšie čísla.



Označme si teraz pravé dolné číslo y. V sčítavacej pyramíde vieme teraz doplniť aj všetky ostatné, úplne hore sme dostali y – 1.



S odčítavacou pyramídou to bude trošku komplikovanejšie, aj keď v nej tiež stačí dopočítať správne čísla len do posledných kociek v každom riadku. Pri každom určení hodnoty sa nám ale riešenie rozdelí na dve možnosti, podľa toho, ktoré z posledných dvoch čísel v aktuálnom riadku predpokladáme, že je väčšie. Značiť to budem takto: (>,>,<) znamená, že v spodnom riadku y > 1, v druhom nad ním 4 > y – 1 a nakoniec, že 4 < 5 – y. Porovnaním s vrcholom sčítavacej pyramídy dostaneme nejaké hodnoty y, pričom musíme overiť, čí pre ne naozaj platila zvolená sekvencia nerovností, alebo jednoduchšie dosadíme y do posledného riadku a skontrolujeme pyramídu. (Pri overovaní budeme s každou nerovnosťou pripúšťať aj rovnosť, pri nej môžeme odčítať v ľubovoľnom poradí, lebo výsledok je 0).

< < < dáva hodnoty y – 1, y – 5, y – 9 pričom toto by sa malo rovnať vrchu sčítavacej pyramídy, teda y – 1 = y - 9. To ale pre žiadne y neplatí.

< < > dáva hodnoty y – 1, y – 5, 9 – y. Má platiť 9 – y = y – 1, z čoho dostaneme y = 5. Pri overovaní a dosadení 5 do spodného riadku všetko vyjde správne, takže máme **prvé riešenie**, pre **y = 5**.

< > < dáva hodnoty y – 1, 5 – y, 1 – y. Má platiť 1 – y = y – 1, teda y = 1. Pri overovaní 1 dostaneme **druhé riešenie**, pre **y = 1**.

< > > dáva hodnoty y – 1, 5 – y, y – 1. y – 1 = y – 1, čo je úplne to isté ako v sčítacej pyramíde. Tu nám vyšlo, že by to mohlo platiť pre každé y, ktoré bude spĺňať podmienky < > >, teda že y > 1 a zároveň 4 > y – 1 a zároveň 4 > 5 – y. Druhú a tretiu podmienku vieme zapísať ako 5 > y a y > 1. Takže **dostávame riešenia** 1**, 2, 3, 4,** 5 (stále berieme do úvahy aj rovnosti).

> < < dáva hodnoty 1 – y, – 3 – y, – 7 – y. Má teda platiť –7 – y = y – 1, čo platí pre y = – 3. Po dosadení ale vrchné čísla v pyramídach nie sú rovnaké. To preto, že sa nám pokazili predpokladané nerovnosti: malo by platiť 1 > – 3, 4 = 4, 4 < 0. Tu nám nesedí posledné znamienko, takže – 3 nie je riešením.

> < > dáva hodnoty 1 – y, – 3 – y, 7 + y. Má platiť 7 + y = y – 1, teda y = 4. Pri overovaní dostaneme 1 > 4, 4 < 3, 4 > 1. Znamienka nesedia, teda v tomto prípade 4 nie je riešením. (Nič to ale nemení na fakte, že 4 sme našli ako správne riešenie, keď sme predpokladali inú kombináciu znamienok).

> > < dáva hodnoty 1 – y, 3 + y, y – 1. Má platiť y – 1 = y – 1. Toto by malo platiť pre všetky y, ktoré budú spĺňať podmienku > > <, teda že 1 > y, 4 > 1 – y a 4 > 3 + y. Týmto podmienkam vyhovuje iba číslo 1, takže 1 je riešenie.

> > > dáva hodnoty 1 – y, 3 + y, 1 – y. Má platiť 1 – y = y – 1, teda y = 1. Pri overovaní dostaneme 1 = 1, 4 > 0, 4 = 4. Takže 1 je riešenie.

<u>Našli sme teda 5 celočíselných riešení, v dolnom riadku budú čísla 5, - 3, 1 a jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5.</u>