JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

SEZAM, školský rok 2013/14, vzorové riešenia 3. zimnej série

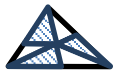
Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou sa končí aj zimná časť tohtoročného SEZAMU. Gustáv, Adela a Jonatán sa s vami do jari lúčia. Najšikovnejších z vás čaká zimné sústredenie v Patrovci (pri Trenčíne), ktoré bude v termíne od 20. do 23. marca. Skôr než sa pustíte do vypĺňania návratky, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

Za **organizátorov** vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

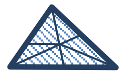
Príklad č. 1 (*opravovala Erika Novotná*)

Veľmi rýchlo sa dá zistiť, že trojuholníkov je na obrázku celkovo 14. My sa ich pokúsime postupne hľadať a sčítavať čísla v nich tak, aby sme si počítanie čo najviac uľahčili. Budeme vytvárať „medzisúčty", ktoré sme už predtým počítali.

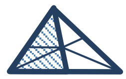
1. medzisúčet – keďže každý zo šiestich malých trojuholníkov na obrázku určuje jedno trojuholníkové číslo, bude prvý medzisúčet tvorený súčtom čísel na týchto šiestich trojuholníkoch, teda 2+6+3+5+7+9 = **32**.



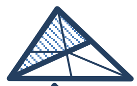
2. medzisúčet – celý samotný obrázok je jeden trojuholník, preto bude trojuholníkové číslo priamo aj súčet 2+6+3+5+7+9= **32**.



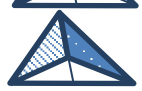
3. medzisúčet – dva trojuholníky, ktoré sú naznačené na obrázku majú dokopy tiež súčet **32** (lebo dokopy pokrývajú celý veľký trojuholník).



4. medzisúčet – podobne aj dva trojuholníky naznačené na nasledujúcom obrázku majú súčet **32**.



5. medzisúčet – ešte sme nezarátali tri trojuholníky zložené z dvojíc malých trojuholníčkov. Vidíme, že súčet všetkých troch trojuholníkových čísel prislúchajúcich k týmto trojuholníkom je tiež **32**.



Takto sme započítali všetkých 14 trojuholníkov a konečný výsledok bude súčtom jednotlivých medzisúčtov, čiže 32+32+32+32+32=160. ***Teda kód na vstup do laboratórií je 160.***

Poznámka: *Viacerí z Vás si nevšimli, že čiara vychádzajúca z pravého dolného vrcholu veľkého trojuholníka nie je rovná – za bodom, kde sa stretá s ostatnými deliacimi čiarami, nepokračuje po tej istej priamke, ale zahne mierne doľava. Takže táto „krivá" čiara nerozdeľuje pôvodný trojuholník na dva menšie trojuholníky, ale na dva štvoruholníky, a teda do súčtu ich nezapočítavame. Rozhodli sme sa však za túto chybu body nestŕhať, keďže na obrázku krivosť čiary nebola až tak zreteľná.*

Príklad č. 2 (*opravoval Mojo Majdiš*)

Pozrime sa najskôr na to, ako vidíme rôzne čísla v zrkadle. Čísla 0, 1 a 8 ostanú úplne rovnaké. Číslo 5 vidíme ako 2, a naopak dvojku vidíme ako päťku. Ostatné čísla, 3, 4, 6, 7 a 9, nevyzerajú v zrkadle ako žiadne iné číslo. Môžete si to overiť doma pred zrkadlom.
Osmička môže byť len na mieste jednotiek, či už v hodinách alebo minútach. Avšak potom sa v zrkadle objaví na mieste desiatok (v minútach alebo hodinách), čo však nemôže byť reálny čas, pretože 80 a viac hodín ani minút neexistuje. Preto nemôžeme použiť číslo 8.
Teda časy na hodinkách, ktoré nás zaujímajú, sú zložené len z čísel 0, 1, 2 a 5.
Všimnime si zaujímavú vec: minúty v zrkadle sú len zrkadlovým odrazom hodín na hodinkách. Veľmi dobre si premyslite predchádzajúcu vetu.
To však znamená, že nám stačí vypísať si hodiny, ktoré môžeme dostať z povolených čísel (0, 1, 2 a 5) a k nim nám už zrkadlo dodá minúty. Takto dostaneme časy:
00:00, 01:10, 02:50, 05:20, 10:01, 11:11, 12:51, 15:21, 20:05, 21:15, 22:55.
Dokopy sa teda čas, ktorý je rovnaký aj v zrkadle, vyskytne na hodinkách 11-krát.

Príklad č. 3 ***(****opravovali Maťo Bachratý a Mišo Hagara*)

Na začiatok si uvedomme, že na to, aby sme vyriešili úlohu nám nestačí nájsť jedno riešenie. Ak totiž nájdeme jedno riešenie, no nedokážeme, že je jediné, tak stále môže vyhovovať aj nejaké iné riešenie. Ináč povedané, ak nájdeme jedno riešenie a nedokážeme, že je jediné, tak správna odpoveď na úlohu môže byť: „Úloha má jedno riešenie a to je takéto.“ No správna odpoveď môže byť aj: „Úloha ma viacero riešení, a preto nevieme povedať koľko stojí nový bicyklotrón.“ Ak nenájdeme všetky riešenia, tak nevieme, ktorá z týchto odpovedí je správna, a teda sme úlohu nedokončili.

Pusťme sa teraz do riešenia samotnej úlohy. Chceme zistiť koľko môže stáť nový bicyklotrón. Riaditeľ si vypýtal **Z** zlatiek a **c** centov, čo je aj cena bicyklotrónu. Úrad im však zaslal **c** zlatiek a **Z** centov, čo bolo viac než pôvodná suma. Musí teda platiť **c** > **Z** (ináč by im úrad zaslal menšiu sumu než si pýtali, čo však nie je pravda), zároveň vieme, že **Z** aj **c** sú najviac dvojciferné čísla (ináč by riaditeľ pýtal aspoň 100 centov, alebo by úrad poslal aspoň 100 centov, no centy sú vždy menšie než sto, ináč sa rozmenia na zlatky – 321cent = 3zl 21cent). Ďalej vieme, že suma **c** zlatiek a **Z** centov je to isté ako cena jedného bicyklotrónu plus 19zl 20c plus cena polky bicyklotrónu. Ak by stál bicyklotrón aspoň 54 zlatiek, tak bicyklotrón + 19zl 20c + polka bicyklotrónu je aspoň 54 + 19zl 20c + 27 = 100zl 20c.
No suma **c** zlatiek a **Z** centov je určite menej ako 100zl, a tak vieme, že bicyklotrón stojí určite menej než 54 zlatiek. Preto je **Z** menšie než 54, teda **Z** < 54. Taktiež vieme, že **c** > 19 (v opačnom prípade by suma **c** zlatiek a **Z** centov bola najviac 19zl 18c a to má byť rovnako ako bicyklotrón + 19zl 20c + polka bicyklotrónu). Na koniec si ešte uvedomme, že **c** musí byť párne (ináč by cena polky bicyklotróna bola v desatinných centoch, čo je hlúposť).

Zhrňme si, čo zatiaľ vieme: **c** > **Z**, **c** > 19, **Z** < 54, **c** je párne a platí nasledujúca rovnosť:
c zlatiek a **Z** centov = **Z** zlatiek a **c** centov + 19 zlatiek a 20 centov + 0,5 · (**Z** zlatiek a **c** centov)

Jeden z možných spôsobov ako sa dá teraz úloha vyriešiť je takýto:
Číslo **Z** môže byť 0 až 53. Postupne budeme skúšať za **Z** dosádzať všetky tieto čísla. A čo keď dosadíme? Ukážeme si to na príklade – nech napríklad **Z** = 21.
Potom (**Z** zlatiek a **c** centov + 19 zlatiek a 20 centov + 0,5 · (**Z** zlatiek a **c** centov)) je dokopy 21 + 19 + 10 = 50 zlatiek (polovica z 21 zlatiek a **c** centov je 10 zlatiek + 50centov + polovica z **c** centov) plus nejaké centy. Centy nám môžu presiahnuť 100 centov, možno aj 200, no určite nie viac.
(21 zlatiek a **c** centov + 19 zlatiek a 20 centov + 0,5 · (21 zlatiek a **c** centov)) je teda 50, 51 alebo 52 zlatiek a niekoľko centov. No to je presne **c** zlatiek a **Z** centov, a teda **c** môže byť iba niektoré z troch čísiel 50, 51 alebo 52 (51 môžeme ihneď vylúčiť, lebo nie je párne). Teraz už len overíme, či sedia dvojice **Z** = 21 a **c** = 50 a **Z** = 21 a **c** = 52. Ľahko overíme, že ani jedna z týchto dvojíc nevyhovuje.
Toto spravíme, pre všetky **Z** od 0 po 53. *Je to trochu prácne, no dajú sa vymyslieť aj ďalšie zlepšováky. Napríklad sa dá ukázať, že centy vo výraze (**Z** zlatiek a **c** centov + 19 zlatiek a 20 centov + 0,5 · (**Z** zlatiek a **c** centov)) vždy prekročia stovku, a tak nám pre danú hodnotu **Z** stačí testovať len dve možné **c**-čka.*
Po chvíli trápenia sa s kalkulačkou a papierom zistíme, že vyhovuje iba dvojica *Z* ***= 40 a*** *c* ***= 80. Úloha má teda iba jedno riešenie a preto s istotou môžeme povedať, že nový bicyklotrón stojí 40 zlatiek a 80 centov.***

Poznámka: *Úloha sa samozrejme dala riešiť aj inými spôsobmi. Niektorí z vás si zostrojili rovnicu ako zo **Z** vyjadriť **c** a potom ste hľadali také celé **Z** aby aj **c** bolo celé (náročné rátanie sa dalo pekne zjednodušiť napríklad Excelom :)).*
Ďalšie možné riešenie cez rovnice využívalo rovnosť, ktorú už poznáme:
***c** zlatiek a **Z** centov = **Z** zlatiek a **c** centov + 19 zlatiek a 20 centov + 0,5 · (**Z** zlatiek a **c** centov).*
*Pre párne **Z** platí, že 0,5 · (**Z** zlatiek a **c** centov) = 0,5 · **Z** zlatiek + 0,5 · **c** centov. Dá sa ľahko vymyslieť, že centy na pravej strane rovnosti prejdú cez stovku práve raz. Platí teda:*
***Z** centov = **c** centov + 20 centov + 0,5 · **c** centov – 100 centov (-100 centov lebo sme prešli cez sto)*
***c** zlatiek = **Z** zlatiek + 19 zlatiek + 0,5 · **Z** zlatiek + 1 zlatka (+1 zlatiek od centov)*
*Vyriešením tejto sústavy rovníc dostaneme jediné riešenie **Z**=40 a **c**=80. Pre nepárne **Z** sa rovnice trochu zmenia a vyjde, že nemajú celočíselné riešenie. Opäť dospejeme k záveru, že jediné vyhovujúce riešenie je **Z**=40 a **c**=80.*

Príklad č. 4 *(opravovali Lenka Trojaková a Miro Hudec)*

Adela a Jonatán si chcú rozdeliť magnety. Z kôpky si môžu zobrať vždy len taký počet magnetov, ktorý bezo zvyšku delí aktuálny počet magnetov na kôpke, pričom všetky magnety z kôpky môžu zobrať až vtedy, keď ostane už len jeden. Obaja chcú získať čo najviac magnetov a vždy ťahajú najlepšie, ako sa dá.

Ako prvá ide Adela a na kôpke je 21 magnetov. Delitele čísla 21 sú nasledovné: 1, 3, 7 a 21. Adela nemôže vziať z kôpky všetkých 21 magnetov, lebo to by bolo proti pravidlám. Ostali jej teda 3 možnosti:

1. Adela vezme z kôpky v prvom ťahu 1 magnet. Na kôpke ostane 20 magnetov a na ťahu je Jonatán. Keď si Jonatán vezme 10 magnetov, na kôpke ostane už len 10 magnetov. Nech Adela potiahne ľubovoľný počet magnetov deliaci číslo 10, Jonatánovi sa určite ujde ešte aspoň 1 magnet. (Premyslite si, či neklamem.) Jonatán teda bude mať aspoň 11 magnetov, čo ja viac ako polovica a preto v takomto prípade Jonatán určite vyhrá.

2. Adela vezme z kôpky v prvom ťahu 3 magnety. Na kôpke ostane 18 magnetov a na ťahu je Jonatán. Jonatán si vezme z kôpky 9 magnetov a na kôpke ostane 9 magnetov. Adela môže teraz vziať 1 alebo 3 magnety.
   a. Ak vezme 1, na kôpke ich ostane 8. Jonatán si z tých 8 vezme 4, čím bude mať spolu 13 magnetov a vyhrá.
   b. Ak si Adela vezme z 9 magnetov 3, na kôpke ich ostane 6, z ktorých si Jonatán vezme 3. Takto bude mať Jonatán spolu 12 magnetov, čiže vyhrá.

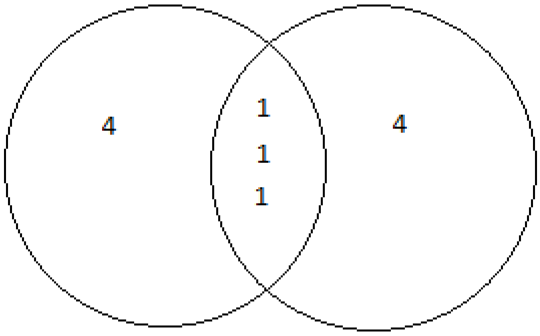
   Ani táto možnosť teda nie je cestou k výhre pre Adelu.

3. Adela vezme z kôpky v prvom ťahu 7 magnetov. Na kôpke ostane 14 magnetov. Jonatán môže potiahnuť 1, 2 alebo 7 magnetov. Keď si Jonatán vezme 7 magnetov, na kôpke ich ostane 7. Keďže 7 je prvočíslo, Adela nemá inú možnosť, ako potiahnuť 1 magnet. Teraz je na kôpke 6 magnetov a na ťahu je Jonatán. Jonatán má tri možnosti:
   a. Vezme 3 magnety. Na kôpke ostanú 3 magnety z ktorých Adela môže vziať len 1. Zvyšné dva magnety si Jonatán s Adelou rozdelia po jednom. Jonatán má v takomto prípade 11 magnetov, Adela 10, takže Jonatán vyhral.
   b. Jonatán vezme 2 magnety. Na kôpke ostanú 4 magnety, z ktorých si Adela vezme 2 a zvyšné 2 si rozdelia po jednom magnete každý. V takomto prípade má Jonatán 10 magnetov a Adela 11. No keďže má Jonatán lepšiu možnosť ťahania (možnosť 3a), tak týmto spôsobom (3b) určite hrať nebude, lebo pre neho nie je najlepší možný.
   c. Jonatán vezme 1 magnet. V takomto prípade opäť vyhrá Jonatán. Skúste si sami rozobrať túto možnosť.

Týmto sme rozobrali všetky možnosti a zistili sme, že nech Adela v prvom ťahu vezme ľubovoľný povolený počet magnetov, tak ***Jonatán vždy vie ťahať tak, aby vyhral.***

Príklad č. 5 (opravoval Samo Tomašec)

Ukážeme, že naozaj môže nastať prípad, kedy bude priemer celej triedy horší ako 2, no pritom priemery kolobežkárov aj korčuliarov budú lepšie než dva. Zamyslite, že nájdením jedného takéhoto prípadu už úplne odpovieme na otázku zo zadania.



Na obrázku máme graficky znázornenú triedu s piatimi žiakmi (každá známka na obrázku je vlastne jeden žiak). V ľavom kruhu sa nachádzajú korčuliari a v pravom kolobežkári (v prieniku kruhov sú teda tí žiaci, čo korčuľujú aj kolobežkujú). Priemer korčuliarov (ľavý kruh) je $(4 + 1 + 1 + 1) \div 4 = 1{,}75$ a rovnaký priemer majú aj kolobežkári (pravý kruh).
Ale priemer celej triedy je $(4 + 4 + 1 + 1 + 1) \div 5 = 2{,}2$ a to je viac než 2.
Ukázali sme, že naozaj môže byť priemer celej triedy horší ako 2, aj keď sú priemery kolobežkárov aj korčuliarov lepšie než 2.

Poznámka: *Skúsme si ešte uvedomiť ako je to možné, že korčuliari aj kolobežkári majú kvalitné priemery, no o celej triede sa to už nedá povedať. Nuž ak máme v triede šikovnú partiu detí, čo vedia aj korčuľovať aj kolobežkovať, tak oni vedia zdvihnúť priemer aj menej šikovným spolužiakom, čo dostávajú zle známky a vedia iba kolobežkovať. Podobne vedia zdvihnúť priemer aj korčuliarom so zlými známkami. No keď sa títo slabší korčuliari a kolobežkári spoja, tak je to na jednotkárov už moc veľa zlých známok a neudržia dobrý priemer (presne takýto je aj prípad na obrázku vyššie – jeden štvorkár a traja jednotkári majú priemer lepší než dva, no dvaja štvorkári a traja jednotkári už majú priemer horší než dva).*

Príklad č. 6 (opravovala Ajka Bachratá)

Chceme vybrať presne 50 loptičiek na ktorých bude súčet 2900, tak aby sme použili čo najmenej párnych čísel. Medzi číslami od 1 do 100 je presne 50 nepárnych čísel a 50 párnych. Skúsme si na začiatok vybrať všetkých 50 nepárnych čísel, či nám nevyjde rovno súčet 2900. Súčet všetkých nepárnych čísel menších ako 100 je 2500 (môžeme si to spočítať buď ručne, na kalkulačke, alebo sa dajú vymyslieť rôzne zlepšováky - skúste porozmýšľať).
Súčet 2500 je o 400 menší ako požadovaný súčet 2900. Aby sme zvýšili súčet vymeníme niektoré malé nepárne čísla (1, 3, 5, 7, ...) za veľké párne čísla (100, 98, 96, ...). Budeme vždy vymieňať po dve nepárne čísla. Keby sme vymenili len jedno, tak by sme mali jedno párne číslo a 49 nepárnych, preto by aj súčet musel byť nepárny. Podobne keby sme vymenili 3 nepárne čísla za 3 párne, tak by musel byť súčet nepárny. Preto budeme vymieňať vždy len párny počet čísel.
Takže zoberme všetky nepárne čísla 1, 3, 5, 7, 9, ..., 95, 97, 99 a poďme ich vymieňať. Vymeníme 1 a 3 za 100 a 98. Tým zvýšime súčet 2500 o 100 + 98 - 1 - 3 = 190 na 2690. Čo ešte nestačí. Preto vymeníme 5 a 7 za 96 a 94. Tým zvýšime súčet 2690 o 96 + 94 - 5 -7 = 174 na 2864. Čo stále nestačí - do 2900 chýba ešte 36. Takže nám nestačí vymeniť len štyri nepárne čísla, lebo by bol celkový súčet moc malý. Teraz ešte musíme vymeniť ďalšie dve nepárne čísla za dve párne, ktorých súčet je o 36 väčší. To sa už dá viacerými možnosťami, napríklad vymeníme 9 a 11 (súčet 20) za 30 a 26 (súčet 56). Tým zvýšime súčet 2864 o 30 + 26 - 9 -11 = 36 na 2900. Práve sa nám podarilo vyrobiť súčet 2900 použitím šiestich párnych čísel a ukázali sme, že menší počet párnych čísel nestačí.
Použili sme párne čísla 100, 98, 96, 94, 30, 26 a nepárne čísla 13, 15, 17, 19, ...95, 97, 99. Ale dalo by sa to viacerými spôsobmi. Zároveň sme ukázali, že s menej párnymi číslami súčet 2900 vyrobiť nevieme.