JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU

SEZAM, školský rok 2016/17, vzorové riešenia 2. letnej série

Milí riešitelia,
do rúk sa k vám práve dostali zadania tretej, a teda poslednej letnej série tohtoročného SEZAMu. Ian, Jean a Brianna sa veľmi potešili všetkým vašim riešeniam. Zároveň na vás čaká posledná sada úloh, s ktorými potrebujú pomôcť. Využite poslednú možnosť zabojovať o čo najlepšie umiestnenie vo finálnom poradí. Tí najúspešnejší z vás sa môžu tešiť na letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 12. až 20. augusta. Pred tým než sa pustíte do riešenia úloh, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, určite vám to pomôže.
Nakoniec vás ešte chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

*Príklad č. 1 (*opravovala Maťa Kudelčíková)

Najskôr zistíme, koľko rôznych trojuholníkov sa dá vyrobiť z pravidelného osemuholníka ABCDEFGH takým spôsobom, že vyberieme každú možnú trojicu jeho vrcholov. Keďže osemuholník je pravidelný, stačí nám nájsť koľko a akých možností je pre jeden z ôsmich vrcholov. tento počet vynásobíme 8 (počet vrcholov) a ešte vydelíme 3 (každý trojuholník sa skladá z 3 vrcholov, opakovali by sa mi rovnaké možnosti – napr. ABC, BCA a CBA je ten istý trojuholník započítaný trikrát). Trojuholníkov s bodmi:

AB* bude 6 (C, D, E, F, G, H)
AC* bude 5 (nepočítame tam už ACB, tento trojuholník už máme zarátaný)
AD* budú 4
AE* budú 3
AF* budú 2
AG* bude 1.

Dokopy ich je 21. Ako sme spomenuli na začiatku, tento počet vynásobíme 8 a vydelíme 3, čiže dokopy bude (21 · 8) ÷ 3 = 56 rôznych trojuholníkov.

Teraz musíme ešte zistiť, koľko z nich bude pravouhlých, koľko tupouhlých a koľko ostrouhlých. Musíme vypočítať, aké uhly sa budú v týchto trojuholníkoch vyskytovať. Osemuholník rozdelíme na 8 rovnakých rovnoramenných trojuholníkov, bod v ktorom sa stretávajú označíme S. Uhol pri bode S má veľkosť 360°, ktorú keď vydelíme 8, tak dostaneme veľkosť uhla každého z rovnoramenných trojuholníkov pri bode S. Táto veľkosť je 360° ÷ 8 = 45°. Keďže sú tieto trojuholníky rovnoramenné, uhly pri základni budú zhodné. Môžeme ich dopočítať ako (180° – 45 °) ÷ 2 = 67,5°. Na dopočítanie ostatných uhlov v trojuholníkoch využijeme to, že súčet uhlov v trojuholníku je 180°, rovnoramennosť niektorých trojuholníkov a rovnobežnosti a kolmosti úsečiek.

Už nám stačí iba zistiť, koľko je akých trojuholníkov. Trojuholníky, ktoré obsahujú pravý uhol sú pravouhlé, tie v ktorých je uhol väčší ako 90° sú tupouhlé a tie, ktoré majú všetky uhly menšie ako 90° sú ostrouhlé.

Keď ich všetky spočítame, dostaneme (9 · 8) ÷ 3 = ***24 pravouhlých***, (9 · 8) ÷ 3 = ***24 tupouhlých*** a (3 · 8) ÷ 3 = ***8 ostrouhlých trojuholníkov***.

*Príklad č. 2 (*opravoval Kajo Hrubják*)*

Veľa správnych riešení začínalo vetami ako: „Najskôr som si poskladal ihlan zo zadania", „Vyrobil/a som si ihlan a dráhu." a podobne. Skutočne sme v našom svete, v ktorom sú bytovky, knihy, krabice zvyknutí viac na pravé uhly a kocky sa nám v predstavách otáčajú ľahšie ako ihlany. Preto je fajn si ho skúsiť skutočne vyrobiť. Potom už len treba zopár vecí:

- Položiť ihlan na dráhu na príslušnú farbu.
- Všimnúť si, do koľkých strán môže byť otočený.
- Nezabudnúť, že máme dve červené steny a nevieme, ktorá je tá otlačená. Toto netreba ak začíname zelenou.
- Kotúľať a skúšať, kde sa nám otlačia dobré strany.

A neprestať kým neskúsime všetky možnosti. Rovnako šikovný je ten, čo si to vie predstaviť, ako aj ten, kto si vie pomôcť ihlanom, ktorý si sám šikovne vyrobil.

Príklad č. 3 (*opravovala Ľudka Šimková*)

Maťko má dvojciferný vek. Označme si ho AB. Ak prehodíme cifry v jeho veku, dostaneme Kubkov vek BA. Toto číslo musí byť opäť dvojciferné číslo. Takže ani jeden z vekov nemôže končiť 0, inak by sme po prehodení cifier nedostali dvojciferné číslo.

Druhú mocninu ľubovoľného čísla n dostaneme tak, že ho vynásobíme druhýkrát samým sebou: $n^2 = n \cdot n$. Vieme, že ak odrátame druhé mocniny vekov Kubka a Maťka, dostaneme druhú mocninu Brianninho veku, ktorý je celé číslo. Označme si ho n. Vek chlapcov si napíšeme v rozvinutom zápise.

$$(10\cdot A + B)^2 - (10\cdot B + A)^2 = 100\cdot A^2 + 20\cdot A\cdot B + B^2 - 100\cdot B^2 - 20\cdot A\cdot B - A^2 = 99\cdot A^2 - 99\cdot B^2 =$$

$$= 99 \cdot (A^2 - B^2) = 3^2 \cdot 11 \cdot (A^2 - B^2) = n^2$$

Na pravej strane máme mocninu celého čísla. To znamená, že ľavú stranu rovnice musíme vedieť napísať ako mocninu nejakého celého čísla. Ak si ju rozložíme na súčin prvočísiel, musí sa v ňom každé nachádzať párny počet krát. Trojka sa nám tam nachádza 2-krát, 11 iba raz. V zátvorke $(A^2 - B^2)$ sa tak musí nachádzať druhá 11. Môže sa tam však nachádzať ešte aj niečo ďalšie, ale iba v druhej mocnine. Teda $(A^2 - B^2) = 11 \cdot x^2$. Nezabúdajme, že A a B sú cifry rôzne od 0 najviac 9 a najmenej 1. Zátvorka má najväčšiu hodnotu vtedy, keď A je najviac a B najmenej.

$(A^2 - B^2) \leq 9^2 - 1^2 = 80 \Rightarrow 11 \cdot x^2 \leq 80 \Rightarrow x^2 \leq 7 \Rightarrow$ x môže byť len 0, 1 alebo 2.

1) $x = 0 \Rightarrow (A^2 - B^2) = 11 \cdot 0 = 0 \Rightarrow A = B \Rightarrow$ ***Maťko a Kubko majú rovnaký vek, obidve cifry sú rovnaké. Môžu mať 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 alebo 99 rokov a Brianna má vždy 0.***
2) $x = 1 \Rightarrow (A^2 - B^2) = 11 \cdot x^2 = 11$. Môžeme si zobrať druhé mocniny čísel 1 až 9 a zistiť, kedy majú rozdiel 11 alebo si zátvorku rozložíme na súčin: $(A^2 - B^2) = (A - B) \cdot (A + B) = 11$. Keďže 11 je prvočíslo, nevieme ho už ďalej rozložiť na súčin čísel rôznych od 1. Musí sa tak nachádzať celé v jednej z dvoch zátvoriek na ľavej strane. Druhá zátvorka musí byť rovná 1. Súčet cifier je viac ako rozdiel takže $(A + B) = 11$ a $(A - B) = 1$. Odtiaľ dostaneme $2\cdot A = 12 \Rightarrow A = 6$ a $B = 5$. ***Maťko má 65, Kubko 56 a Brianna 33.***
3) $x = 2 \Rightarrow (A^2 - B^2) = 11 \cdot 2^2 \Rightarrow (A - B) \cdot (A + B) = 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (A + B)$ je najviac 18 a $11 \cdot 2 = 22$ je viac. Takže $A + B = 11$ a $A - B = 2 \cdot 2 = 4$. Odtiaľ dostaneme $2 \cdot A = 15 \Rightarrow A = 7{,}5$ čo nie je cifra, takže toto riešenie nevyhovuje.

Príklad č. 4 (*opravovala Ivka Hrivová*)

Každý z mníchov si myslel práve jedno číslo a zdvihol ruku práve raz. To znamená, že počet zdvihnutých rúk odpovedá počtu mníchov, čo je 4. A keďže zo zadania vieme, že jednotlivé počty zdvihnutých rúk sú aj myslené čísla, ich súčet bude 4.

Máme k dispozícii čísla 0, 1, 2, 3 a chceme vytvoriť štvorice so súčtom 4. Tie sú :

1, 1, 1, 1
1, 1, 2, 0
2, 2, 0, 0
1, 3, 0, 0

Poďme si ich rozobrať.

V prvom prípade máme možnosť, kedy si všetci mnísi mysleli číslo 1 a teda ich počty na tabuli budú 0, 4, 0, 0 (postupne pre čísla 0, 1, 2, 3). Vidíme, že sa tieto štvorice nezhodujú a teda táto možnosť podmienkam úlohy nevyhovuje.

V druhom prípade myslel jeden mních na 0, dvaja na 1, jeden na 2 a nikto na 3, teda počty mníchov na tabuli budú 1, 2, 1, 0 a vidíme, že teraz už dostávame presne rovnaké čísla, ako sú tie myslené a teda sme našli vyhovujúcu, snáď nie jedinú, možnosť.

V treťom prípade mysleli dvaja mnísi na 0 a dvaja na 2, teda ich počty budú 2, 0, 2, 0 a to nám dáva druhú vyhovujúcu možnosť.

Tak sa pozrime ešte na posledný prípad a to taký, kde mysleli dvaja mnísi na 0, jeden na 3 a jeden na 1. Keď si aj tu spravíme postupne súčty mníchov, dostaneme štvoricu čísel 2, 1, 0, 1, ktorá sa s našou štvoricou myslených čísel nezhoduje.

Máme teda dve riešenia úlohy. Ak sa myslené čísla zhodovali s tými Ianovými na tabuli, mnísi museli myslieť buď na čísla 1, 1, 2, 0 alebo 2, 2, 0, 0.