JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU

# SEZAM, školský rok 2017/18, vzorové riešenia 2. zimnej série

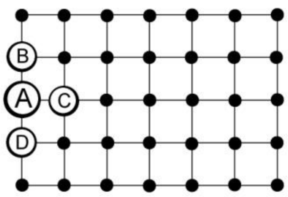
Milí riešitelia,
práve sa vám do rúk dostali zadania poslednej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Sára a Arthur vám zo vzdialenej planéty Geometrios ďakujú za všetky vaše riešenia. Teraz vás čaká tretia séria a posledná šanca zabojovať o účasť na zimnom sústredení. Predtým než sa pustíte do riešenia si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, dozviete sa kde ste spravili prípadné chyby, a možno sa dozviete aj iné spôsoby ako sa dali úlohy vyriešiť.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

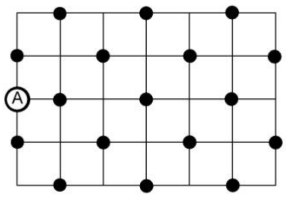
Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

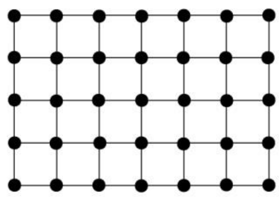
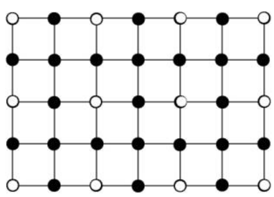
## *Príklad č. 1 (opravovala Katka Čárska)*

Časť z vás uvažovala, že každý z bodov musí mať 2 alebo 4 susedov, druhá časť ako prijateľnú možnosť uvažovala aj 0 susedov. Za správne riešenia som zobrala oboje. To, či je nula párne číslo nechám už na vás. V prvom prípade úloha nemá riešenie, v druhom prípade sú riešenia dve. Ako sa k nim môžeme dostať ? Ako zistila väčšina z vás, problémom sú body po okraji šachovnice, ktoré majú 3 susedov. Takýmto je aj bod A, ktorá má susedov B,C, D. Body B,C,D môžeme podľa podmienok úlohy ofarbiť štyrmi spôsobmi – B,C,D čierne, alebo jeden z týchto bodov čierny.

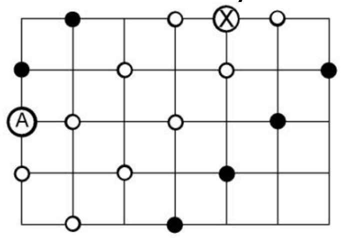
Keď ofarbíme všetky tri body na čierno, postupne musíme ofarbiť na čierno aj ďalšie body – spolu 17 bodov – môžeš ich vidieť na 2.obrázku. ***Ofarbením bodu A na bielo alebo na čierno dostaneme jediné dve riešenia úlohy*** (ak pripustíme, možnosť, že nula je párne číslo) – vyskúšajte si to. Riešenia úlohy sú na obrázku 3 a 4.

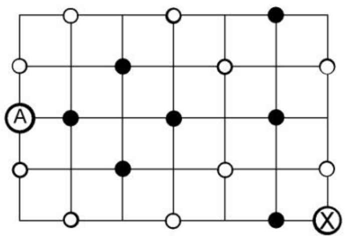




Keď ofarbíme na čierno bod B a body C, D na bielo, dostaneme po ofarbení ďalších bodov situáciu na obrázku 5. Problém nastane pri bode X, ktorý bude mať troch bielych susedov. Úlohe teda pri čiernom bode B a bielych bodoch C,D nemá riešenie . Podobná situácia nastane aj pri čiernom bode D a bielych bodoch B,C ( vďaka symetrií šachovnice – vyskúšajte si to).






Keď ofarbíme na čierno bod C a body B,D na bielo, dostaneme po ofarbení ďalších bodov (toto si tiež vyskúšajte sami) situáciu na obrázku 6. Problém nastane pri bode X, ktorý má len jedného bieleho suseda. Týmto sme si prešli všetky možnosti, ako možno zafarbiť body B,C,D. Žiadna iná možnosť, ako body ofarbiť už neexistuje.

***Príklad č. 2** (opravoval Hynek Bachratý)*

Veľa z vás si ešte pred začiatkom riešenia overila, že zo 6 kartičiek môžeme vytvoriť presne 20 trojíc, teda Sára s Arturom ich naozaj vyskúšali a spočítali všetky. (V trojiciach vybraných kartičiek nezáleží na poradí, keďže na ňom nezávisí ani súčet čísel na nich.) Mnohí si tiež všimli a neskôr aj využili, že každá kartička sa vyskytuje v 10 trojiciach, každá dvojica kartičiek v 4 trojiciach, z 5 kartičiek viem vytvoriť 10 trojíc atď.

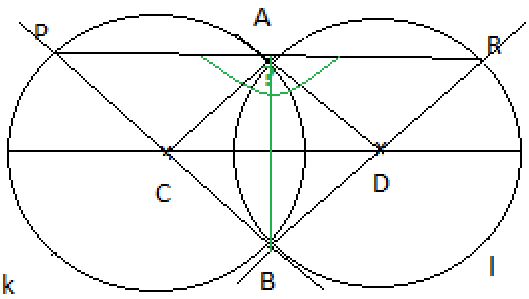
Samotné hľadanie čísel napísaných na kartičkách malo svoju ľahšiu a ťažšiu časť. Po chvíli uvažovania alebo aj skúšania sa skoro všetkým podarilo zistiť a skontrolovať, že **kartičky s číslami 6,6,6,6,6 a 4 vyhovujú zadaniu a vytvorím z nich desať súčtov (4+6+6=)16 a desať súčtov (6+6+6=)18.**
**O mnoho ťažšie bolo vysvetliť, že sa to nedá žiadnym iným spôsobom, a na kartičkách sú teda určite zapísané čísla 6,6,6,6,6 a 4.**

Vo vašich riešeniach sa objavili dva hlavné nápady prečo je to tak. Prvý len naznačíme. Predpokladajme, že na kartičkách sú čísla, ktoré si označíme tak, aby $A \leq B \leq C \leq D \leq E \leq F$. (Môžu byť teda aj rôzne, aj rovnaké, ale usporiadali sme ich podľa veľkosti.) Určite preto pre tri „najmenšie" platí $A+B+C=16$ a pre najväčšie $D+E+F=18$. Teraz si môžete rozpísať všetky možnosti aké tri prirodzené čísla dajú súčet 16, aké súčet 18, a tieto trojice kombinovať do spoločnej šestice. Rýchlo ale zistíte, že po spojení spravidla dostanete aj iné súčty trojíc ako 16 a 18. (Napr. 16=4+5+7, 18=5+5+8, ale týchto 6 čísel na kartičkách by dalo aj súčty 4+5+5=14, 5+5+7=17 atď.) Ak by ste prebrali ozaj všetky možnosti, zostali by len jediné trojice 4+6+6=16 a 6+6+6=18.

To nás navádza na druhý spôsob riešenia. Vidíme, že keď sú na kartičkách rôzne čísla, hrozí nám tiež, že budeme mať viac rôznych súčtov (a nie len 16 a 18). Skúsme preto postupne presnými úvahami zistiť, koľko rôznych čísel na kartičkách môže byť. Ak by boli 4 (alebo viac), môžeme štyri označiť tak, aby $A<B<C<D$. Potom ale platí $A+B+C<A+B+D<B+C+D$, a máme teda až 3 rôzne súčty. Rôznych čísel teda musí byť menej.
Ak by boli tri, aspoň jedno z čísel by sa muselo zopakovať. Môžeme teda predpokladať, že máme kartičky s číslami A,A,B,C. Potom ale zase dostávame tri rôzne súčty $A+A+B$, $A+A+C$ a $A+B+C$. Teda ani 3 rôzne čísla sa na kartičkách vyskytovať nemôžu.
Zostáva teda už len možnosť, že na kartičkách sú len dve rôzne čísla. (Ak by boli úplne všetky čísla rovnaké, dostaneme len jeden možný súčet.) Koľkokrát je ale každé z nich použité? Aspoň jedno musí byť na kartičkách aspoň tri krát. Môže byť druhé použité viac ako raz? Ak áno, máme k dispozícii kartičky s číslami A,A,A,B,B. Z nich ale zase vieme dostať tri rôzne súčty $A+A+A$, $A+A+B$ a $A+B+B$.
Jediná možnosť teda je, že na kartičkách sú dve rôzne čísla, jedno je použité raz a druhé 5 krát. Môžeme ich označiť A,A,A,A,A,B. Keďže $A+A+A$ musí byť 16 alebo 18, je už ľahké dokázať, že jediný výsledok je $A=6$ a $B=4$.

***Príklad č. 3*** *(opravovala Denisa Múthová)*

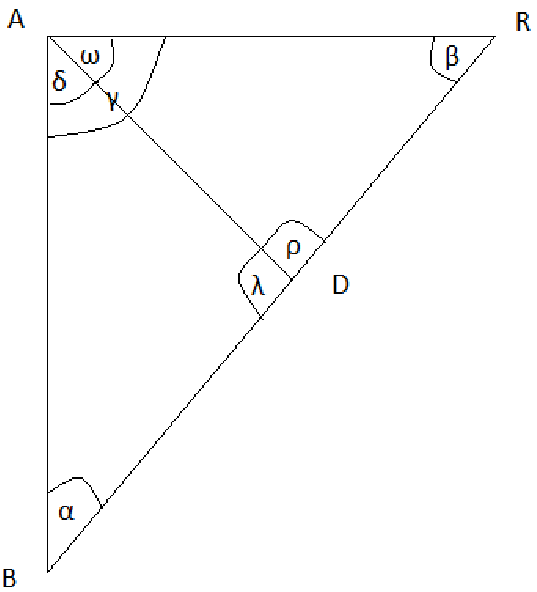
Máme dve kružnice k a l, s rovnakým polomerom a so stredmi označenými C a D. Kružnice sa pretínajú v bodoch A a B. Priamka BC pretína kružnicu k v bode P




a priamka BD pretína kružnicu l v bode R. Aký je veľký uhol PAR?

Pozrime sa čo vieme zistiť priamo z obrázka. Úsečka BR je priemerom kružnice l, keďže prechádza cez jej stred D a body B a R ležia na kružnici l. Rovnako aj úsečka BP je priemerom kružnice k, keďže prechádza cez jej stred C a body P a B ležia na kružnici k. Kružnice majú zo zadania rovnaký polomer a teraz už vieme že aj priemer |BP|=|BR|.

Ako zistíme uhol PAR? Najskôr si ho zapíšme ako súčet uhlov BAP a BAR. Keďže kružnice k a l majú rovnaké, stačí nám určiť jeden z uhlov a druhý bude zhodný. Vezmime si preto napríklad uhol BAR. Pre lepšie znázornenie, načrtneme si obrázok vpísaného trojuholníka ABR kružnici l aj s uhlami.




Aký je veľký uhol BAR, t.j. uhol gama **γ**? Vieme, že súčet uhlov v každom trojuholníku je 180°. My máme na obrázku tri trojuholníky, prvý je ABR, druhý je ABD a tretí je ADR a teda aj tri rovnice (1., 2., 3.):

1: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

2: $\alpha + \lambda + \delta = 180°$

3: $\omega + \rho + \beta = 180°$

A uhly $\lambda + \rho$ sú rovné 180°, keďže ležia na úsečke BR (4. rovnica). Ďalej vieme, že úsečky AD, DB a DR sú polomery kružnice l, teda majú rovnakú dĺžku. Preto trojuholníky ABD a ADR sú rovnoramenné a majú rovnaké uhly pri svojich základniach. To znamená, že uhol alfa α je rovnaký ako uhol delta δ, a uhol beta β je rovnaký ako uhol omega ω.

V rovnicovom značení:

2: $\alpha + \lambda + \alpha = 180°$ --> $\lambda + 2\alpha = 180°$

3: $\beta + \rho + \beta = 180°$ --> $\rho + 2\beta = 180°$

Vložme si pravú stranu rovnice 2. do ľavej strany rovnice 4., tj. $\lambda + \rho = \lambda + 2\alpha$ (lebo obe sa rovnajú 180°), po úprave $\mathbf{2\alpha = \rho}$.
Dosaďme si tento výsledok do 3. rovnice $\beta + 2\alpha + \beta = 180°$, teda $\mathbf{\alpha + \beta = 90°}$ .
A na koniec použijeme 1. rovnicu $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, po dosadení predchádzajúceho výsledku dostávame $90° + \gamma = 180°$.
A náš hľadaný uhol gama $\mathbf{\gamma = 90°}$ (Mnohí z Vás vlastnosť takéhoto trojuholníka poznajú pod názvom Tálesova kružnica). Ostáva nám už vynásobiť uhol gama dvomi a dostaneme ***hľadaný uhol PAR, t.j. PAR= 2γ = 180°.***

### *Príklad č. 4* (opravovala Betka Bohiniková)

Do bežeckých pretekov sa prihlásilo 25 Te-Tivákov. Aby sme vedeli určiť ktorý traja skončili na prvých troch miestach, určite musíme vidieť každého Te-Tiváka bežať aspoň raz. Keďže naraz vedia bežať len piati, rozdelíme našich 25 súťažiacich do piatich skupín po piatich bežcoch. Označme si jednotlivé skupiny A, B, C, D, E.

Zbehne 5 závodov a dostaneme poradie pre každú skupinu.
A: $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$
B: $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$
C: $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_5$
D: $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$, $D_5$
E: $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$, $E_5$

Na základe týchto výsledkov vieme že celkový víťaz musí byť jeden z víťazov jednotlivých skupín. Ak by to bol ľubovoľný iný súťažiaci, tak by sme vedeli že minimálne víťaz z jeho skupiny je rýchlejší. Aby sme našli celkového víťaza necháme bežať závod víťazov skupín. Z neho získame napríklad takéto poradie $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, $E_1$. Celkový víťaz je teda $A_1$. Teraz zostáva určiť prvé a druhé miesto. Keďže chceme určiť poradie pomocou čo najmenej závodov skúsme sa teraz pozrieť na to kto by mohol teoreticky byť druhý alebo prvý.

Z výsledkov závodu skupinových víťazov vieme, že všetci zo skupín D a E sú pomalší ako bežci $A_1$, $B_1$, $C_1$. A teda by nemohol nik z nich byť ani druhý ani tretí. Rovnako aj všetci zo skupiny C sú pomalší ako bežec $C_1$. Môžeme takto ďalej vylúčiť ďalších bežcov, ku ktorým vieme nájsť vždy troch rýchlejších. Vylúčime teda ešte bežcov $B_3$, $B_4$, $B_5$, $A_4$, $A_5$. Zostali teda už len bežci $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $C_1$. Necháme ich teda zabehnúť závod, získame poradie. A víťaz tohto závodu bude celkovo druhý. A druhý bežec tohto závodu bude celkovo tretí.

***Na určenie troch najrýchlejších bežcov nám teda stačí 7 závodov.***