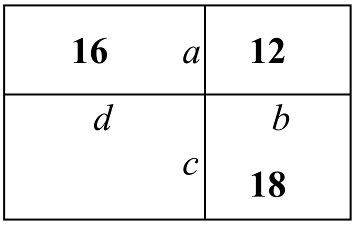
SEZAMKO 2009/2010, Vzorové riešenia 3. série letnej časti

Milí riešitelia,
ani sme sa nenazdali a už sa nám treba s vami rozlúčiť. Opravili sme totiž poslednú sériu SEZAMKa v tomto školskom roku. S tými, ktorým sa darilo najviac, sa ale ešte lúčiť nemusíme – možno sa s nimi stretneme už onedlho na sústredení v Súľove (blízko Bytče).
Santa Mráz, medveď Kochab a ostatné postavy nášho príbehu vám všetkým veľmi pekne ďakujú, že ste im pomohli s toľkými matematickými problémami. V septembri k vám určite zavítajú noví rozprávkoví hrdinovia. Nechajte sa prekvapiť, kto to bude tentokrát. Pokiaľ ste už šiestaci a SEZAMKa budúci rok podľa pravidiel nebudete môcť riešiť, nesmúťte. Väčší brat SEZAMKa – volá sa SEZAM, na vás určite bude myslieť a pošle vám svoje zadania. Aby ste budúci rok patrili k tým najlepším, nezabudnite si prečítať aj tieto vzorové riešenia...

Úspešný koniec školského roka a pekné prázdniny vám želajú všetci vedúci SEZAMKa!

Úloha 1 (opravoval Jakub Daubner)
Zo zadania vieme, že situácia vyzerá ako na obrázku:

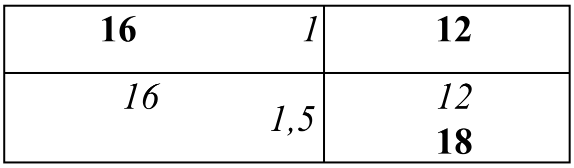


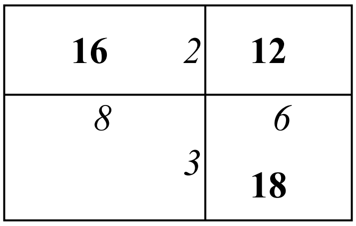
Písmenká *a, b, c, d* v obrázku označujú neznáme dĺžky strán jednotlivých obdĺžnikov (napríklad *a* a *d* sú strany obdĺžnika s obsahom 16).

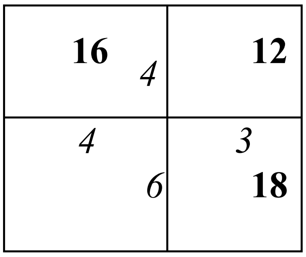
Ako prvé môžeme nájsť všetky možné (celočíselné) rozmery *a, b, c, d*. Dĺžka *a* je spoločná pre oba obsahy 16 a 12, takže musí deliť obe tieto čísla. **Preto *a* môže byť len 1, 2 alebo 4.**

- **Ak *a* = 2**, tak *d* = 16:*a* = 16:2 = **8**, ďalej *b* = 12:*a* = 12:2 = **6**, a potom *c* = 18:b = 18:6 = **3**. Máme teda prvé riešenie *a* = 2, *b* =6, c = 3 a *d* = 8.
- **Ak *a* = 4**, tak *d* = 16:*a* = 16:4 = **4**, ďalej *b* = 12:*a* = 12:4 = **3**, a potom *c* = 18:b = 18:3 = **6**. Dostali sme druhé riešenie *a* = 4, *b* =3, c = 6 a *d* = 4.
- Napokon **ak *a* = 1**, vyjde nám *d* = 16:*a* = 16:1 = **16**, ďalej *b* = 12:*a* = 12:1 = **12**, ale *c* nám potom vyjde *c* = 18:b = 18:12 = **1,5**; čo nie je celé číslo.

Preto sme dostali iba dve riešenia, v ktorých boli všetky dĺžky celé čísla (pozri obrázok nižšie). Ďalších veľa rôznych rozmerov môžeme vypočítať, ak dovolíme, aby aj dĺžky strán nemuseli byť len celé čísla (v zadaní sa nehovorilo o tom, že musíme počítať len s celými číslami). Konieckoncov, prečo by Aliáš nemohol namerať dĺžku 1,5? Takže sane mohli mať napríklad aj takéto rozmery:



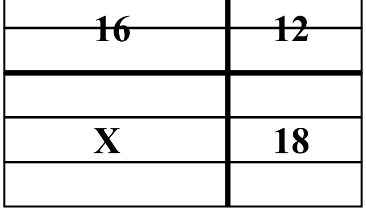




Zistili sme, že sane mohli mať všelijaké rôzne rozmery a že zo zadaných údajov nemôžeme presne zistiť, aké boli. Avšak zaujímavé je, že **obsah neznámeho ľavého dolného obdĺžnika vyšiel vo všetkých prípadoch rovnaký**:

4.6 = 3.8 = 16.1,5 = **24**

Teraz si ešte ukážeme, že to nie je náhoda. Ina povedané, že z troch daných obsahov sa dá tento obsah presne vypočítať. Aj keby obrázok vyzeral akokoľvek, keď ho rozsekáme ako na ďalšom obrázku, tak **všetky malé obdĺžniky, ktoré sú pod sebou, budú rovnaké** (budú mať nielen rovnaký obsah, ale budú mať aj rovnaké rozmery):

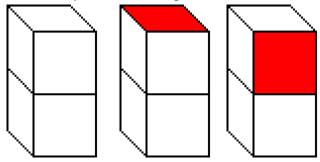


To platí preto, že jedna tretina z 18 je taká istá ako jedna polovica z 12. No a keďže obdĺžniky 16 a *X* sú hneď vedľa týchto obdĺžnikov, tak aj pre ne musí platiť, že polovica zo 16 je to isté ako tretina z *X*. Teda tretina z *X* je 16:2 = 8. Tým pádom celé *X* musí byť vždy 24 (bez ohľadu na rozmery tých malých obdĺžnikov). Celý pôdorys bude mať obsah:

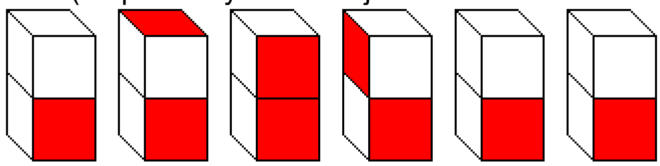
16 + 12 + 18 + 24 = 70.

Úloha 2 (opravoval Miro Hudec)
Začnime dolnou kockou. Máme tu dve možnosti: buď na nej červenú stenu nevidno alebo vidno:

- Ak **červenú stenu na dolnej kocke nevidno**, musí byť buď na jej spodnej alebo vrchnej stene. Potom červená stena na hornej kocke môže byť buď neviditeľná, na vrchnej stene alebo na bočnej stene. Pritom je jedno, ktorá bočná stena to je, lebo otáčaním podložky to vieme meniť, preto by boli takéto veže rovnaké. Zatiaľ máme takéto **tri rôzne veže**:



- Ak **červenú stenu na dolnej kocke vidno**, vďaka otáčaniu je jedno, kde ju vidíme. Môže to byť napríklad vpredu. Červenú stenu na hornej kocke buď nevidíme, alebo je na vrchnej stene alebo na niektorej z bočných stien. Tu už ale musíme započítať všetky bočné steny. Môžeme totiž dostať štyri kombinácie: červené steny sú na sebou, vrchná je naľavo od spodnej, vrchná je napravo od spodnej alebo sú proti sebe. Dostali sme takto **šesť nových veží** (na posledných dvoch je horná červená stena na pravej a zadnej stene, takže ju nevidno):



Z kociek sa dá postaviť spolu 9 rôznych veží.

Úloha 3 (opravovala Lenka Trojaková)
Zo zadania vieme, že na koberci sú za sebou napísané čísla 1 až pokiaľ je to možné, teda 12345678910111213... Našou úlohou je zistiť, ktoré cifry budú na 25-tom a 125-tom mieste tohto dlhočizného vzoru.

Na koberci je napísaných 9 jednociferných čísel od 1 po 9, ktoré spolu zaberú 9 miest. K 25-temu miestu sme sa takto ešte nedostali, ostáva nám 25 – 9 = 16 miest. Týchto 16 miest pripadá na niekoľko dvojciferných čísel. Koľko ich má byť, to zistíme ľahko. Každé dvojciferné číslo zaberá dve miesta. Šestnásť znakov bude stačiť na zostavenie 16:2 = 8 dvojciferných čísel. Ktoré je ôsme dvojciferné číslo? Prvé je 10, druhé 11 až napokon ôsme dvojciferné číslo je 17.

Musíme ešte zistiť, či je z neho na 25-tom mieste jednotka alebo sedmička. Pozrime sa na niekoľko prvých dvojciferných čísel a poznačme si, či sú jednotlivé cifry na párnom alebo nepárnom mieste:

1	0	1	1	1	2
P	N	P	N	P	N

Ľahko vidno, že cifra na mieste desiatok je vždy na párnom mieste. Cifra na mieste jednotiek je vždy na nepárnom mieste. Keďže 25 je nepárne číslo, **hľadaná 25-ta cifra je na mieste jednotiek čísla 17, čo je sedmička**.

Poďme ešte zistiť, ktorá cifra je na 125-tom mieste. To sa dá vyriešiť rôznymi spôsobmi, napríklad niektorí to riešili pomocou vypisovania. Takto sa však dá veľmi ľahko pomýliť (čo sa pri takýchto riešeniach neraz stalo). Ukážeme si preto riešenie, v ktorom sa skoro vôbec nedá pomýliť:

Vieme, že na 25-tom mieste je sedmička v čísle 17. Ešte potrebujeme pridať 100 cifier. Z toľkých cifier vieme vytvoriť 50 dvojciferných čísel. **Ich pridaním sa z čísla 17 dostaneme na číslo 67.** Naša hľadaná cifra je preto v čísle 67. Keďže ide opäť o cifru na nepárnom mieste, opäť vyberieme tú na mieste jednotiek čísla 67, **čo je opäť sedmička. Priklincované cifry budú v oboch prípadoch sedmičky.**

Úloha 4 (opravovala Kačka Bachratá)
V prvom rade musíme pochváliť všetkých, ktorí hru hrali 30-krát a zapísali, ako to dopadlo. U každého z vás to hranie dopadlo inak, pretože možností, ako to mohlo skončiť, je veľmi veľa.

Dala sa však vypozorovať jedna zákonitosť. **Tí, čo hádali rovnakú značku, ako videli na viditeľnej strane kartičky, vyhrávali.** To si všimli mnohí z vás. A mnohí si všimli aj to, že kartičiek s rovnakými značkami na oboch stranách je dvakrát toľko ako tých, čo majú na zadnej strane niečo iné ako vpredu. **Kartičky s rovnakými znakmi sú dve a s rôznymi je iba jedna.**

Keď bude Santa hádať, že na kartičke vzadu je to isté, čo vidí vpredu, mal by byť dvakrát úspešnejší. Pri hraní takýchto tridsiatich hier, by mal Santa vyhrať 20-krát a 10-krát prehrať. Samozrejme, je to o náhode, preto tento výsledok nebude presný. Ako veľmi nepresný môže byť, to ste určite videli, keď ste hru hrali.