SEZAMKO 2011/2012, Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Milí riešitelia,
prišlo nám množstvo správnych a pekných riešení. Jonatánku aj Jonatána veľmi potešilo, že ste si na riešeniach dali záležať a potrápili ste svoje matematické bunky. Netreba ich ale nechať dlho oddychovať. V druhej sérii na vás opäť čaká vlak naplnený cestujúcimi a spolu s ním päť problémov, s ktorými sa vy aj Jonatán pokúsite popasovať. K tomu aby boli vaše riešenia ešte lepšie, vám pomôže prečítanie týchto vzorových riešení. Snažíme sa vám v nich napísať, ako sa dali úlohy riešiť, na čo ste nemali pri riešení zabudnúť a podobne...

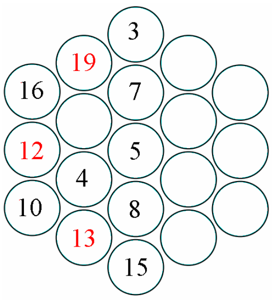
Ak sa vám bude dariť aj v druhej sérii, môžete sa tešiť na stretnutie najlepších riešiteľov, ktoré pre vás chystáme 10. decembra v Žiline. Už teraz sa na vás tešíme...

Napokon malá prosba – skúste si v poradí skontrolovať svoje údaje. Pokiaľ sú náhodou nesprávne, dajte nám o tom spolu s ďalšou sériou vedieť. Nezabudnite poriadne vypĺňať hlavičky na riešeniach a posielať nám aj obálky, aby opravené riešenia spolu s novými zadaniami dorazili na správnu adresu.

Veľa úspechov v druhej sérii vám želajú

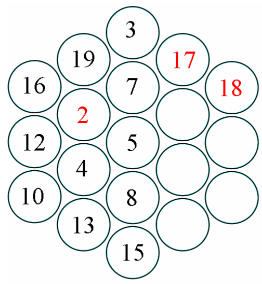
Jonatán, Jonatánka a organizátori.

Úloha 1 (opravovali Baška Klembarová a Katka Kmeťová)



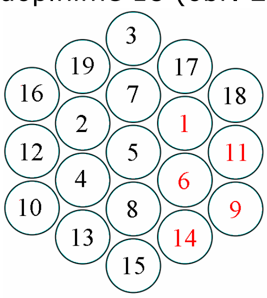
Obr. 1

Na začiatku si väčšina z vás správne všimla, že stredný stĺpec je celý vyplnený, a teda môžeme všetky čísla v ňom sčítať . Výsledok je 38 (3 + 7 + 5 + 8 + 15). Tým sme zistili aký má byť súčet vo všetkých stĺpcoch a riadkoch. Ďalej sa dá postupovať veľmi jednoducho. Hľadáme riadky alebo stĺpce, ktoré mali vyplnené číslami všetky krúžky okrem jedného.
Hneď na prvý pohľad sa dajú vidieť 3 také miesta. V prvom stĺpci zľava, kde sú zatiaľ čísla 16 a 10. Ich súčet je 26 a súčet v celom stĺpci má byť 38, v krúžku medzi nimi teda musí byť číslo 38 – 26 = 12. V prvom hornom stúpajúcom riadku sú čísla 16 a 3, 16 + 3 = 19, a 38 – 19 = 19, teda medzi ne doplníme 19. A ešte najspodnejší klesajúci riadok, kde sú čísla 10 a 15, 10 + 15 = 25, 38 – 25 = 13, takže medzi ne doplníme 13 (obr. 1).



Obr.2

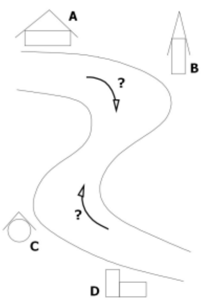
Keď sme doplnili tieto tri čísla, tak sa nám odkryla ďalšia možnosť doplniť číslo. Je to v druhom stĺpci zľava kde sú čísla 19, 4 a 13. Ich súčet je 36, a 38 – 36 = 2, takže do voľného krúžku v tomto stĺpci doplníme 2. Potom sa nám odkryje ďalší takýto riadok, a to druhý zhora stúpajúci, kde boli 12 a 7 a pribudla 2. Teda ich súčet je 12 + 7 + 2 = 21 a 38 – 21 = 17, do voľného krúžku doplníme 17. Doplnením 17, sa nám v najvyššom klesajúcom riadku napravo, vytvoril ďalší zaujímavý riadok, kde budú 3 a 17, ich súčet je 20, a teda do voľného krúžku doplníme 18 (obr. 2).



Obr.3

Postupným dopĺňaním dôjdeme na ďalšie čísla. V treťom stúpajúcom riadku zhora, kde sú čísla 10,4,5 a 18, sa dá do 38 doplniť 1, tým pádom do druhého klesajúceho riadku zhora kde je 19 a 7 a pribudla tam 1, do 38 doplníme 11. V druhom stúpajúcom riadku zdola máme teraz čísla 13,8 a 11, a môžem tam doplniť 6. Potom v prvom stĺpci sprava máme čísla 18 a 11, a teda tam doplníme 9. A posledné číslo bude v poslednom stúpajúcom riadku, kde je 15 a 9, a teda tam doplníme 14 (obr. 3).
Skontrolujeme si, či sedí súčet všetkých stĺpcov a riadkov, a či tam máme všetky čísla od 1 do 19. A keďže to platí, tak je to správne riešenie. ;)

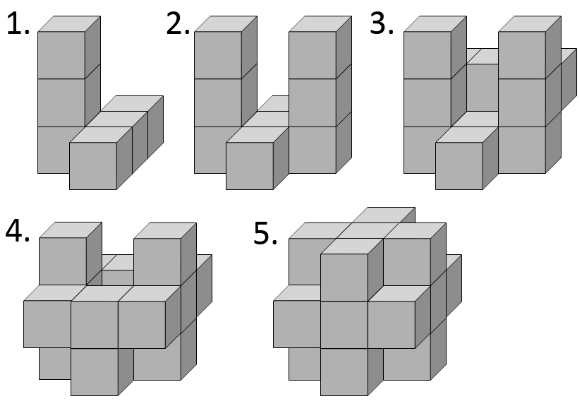
Úloha 2 (opravoval Ivo Cimrák)



Na obrázku je rieka so všetkými štyrmi mestami. Namiesto celých názvov miest sme použili len prvé písmenká. Je nakreslená tak, aby bolo jasné že medzi mestami **nemusí** byť rovnaká vzdialenosť. Aj prúd rieky môže byť v niektorých miestach rýchlejší a v niektorých zase pomalší. Preto nezáleží, koľko zastávok parník mal, ale ako dlho mu trvala cesta. Môže sa kľudne stať, že na ceste z C do A parník prejde cez B a na ceste z C do D neprejde cez žiadne mesto a napriek tomu vzdialenosť medzi C a D bude väčšia ako medzi C a A.

Vieme, že z B do D to trvá parníku 2 hodiny, pričom druhá časť z tejto cesty z C do D trvá hodinu. **Preto môžeme usúdiť, že prvá časť z B do C trvá hodinu**. Pozrime sa teraz na opačný smer. Vieme, že z C do A to trvá hodinu, čo znamená, že **prvá časť tejto cesty z C do B trvá určite menej ako hodinu**. Aj keby z B do A bolo veľmi blízko, predsalen to bude chvíľu trvať.
Takto sme zistili dva fakty: z B do C to trvá PRESNE hodinu a z C do B to trvá MENEJ ako hodinu. To znamená, že parník v smere z C do B ide rýchlejšie ako v opačnom smere. V smere z C do B mu musí pomáhať prúd rieky. **Plťava teda tečie smerom** z C do B, respektíve smerom **z Danielova do Adamova.**

Úloha 3 (opravovala Soňa Galovičová)



Ako mnohí z vás zistili, dieťaťu sa podarilo nájsť všetky kvádre z jeho hračky a žiaden nebol navyše. Ako pri tom môžeme postupovať? Najskôr si spočítajme, či má hračka vôbec správny počet *kocočiek* – kociek o rozmere 10x10x10 cm. Ak by mala hračka tvar celej kocky, bolo by v nej presne 3 x 3 x 3 = 27 *kocočiek*. My sme ale zobrali jednu *kocočku* z každého z ôsmich rohov a jednu zo stredu, čiže celkovo sme odobrali 9 kocočiek a zostalo nám ich 18. Našli sme 6 kvádrikov 30x10x10 cm, z ktorých každý obsahuje 3 *kocočky*, takže ich je taktiež 6 x 3 = 18. Ak by nám vyšli rôzne čísla, hneď by nám bolo jasné, že sa hračka postaviť nedá, no keďže vyšli obe rovnaké, môžeme začať vymýšľať, ako ju postaviť.

Teraz si treba uvedomiť, že aby si dieťa mohlo poskladať kocku naspäť, nestačí mu povedať, že sa to dá! Aby ste úlohu úplne vyriešili, bolo treba odpovedať na všetky otázky v zadaní – a teda **aj ukázať, ako sa to robí**. Jeden spôsob si môžete pozrieť na obrázkoch hore.

Úloha 4 (opravoval Jurko Solcani)

Koľkými spôsobmi môže Jonatán vydať 13€ pomocou sáčkov s celkovými hodnotami 1€, 2€, 4€ a 8€ bez ich otvárania?

Riešenie 1:

Dokopy má 15€. Potrebuje vydať 13€. Majú mu teda zostať 2€. Ak nechce otvárať sáčky, má iba jedinú možnosť a to, že si nechá sáčok s hodnotou 2€ a vydá sáčky s hodnotami 1€, 4€ a 8€.

Riešenie 2:

Sáčky s hodnotami 1€, 2€ a 4€ dávajú dohromady sumu 7€. To je málo a **musí** preto **s istotou vydať sáčok s hodnotou 8€**. Po odpočítaní od celkovej sumy mu ešte zostáva vydať 5€ (13 – 8 = 5). Na to mu nestačia iba sáčky s hodnotami 1€ a 2€ (čo je dokopy 3€), preto **musí s istotou vydať sáčok s hodnotou 4€**. Po odpočítaní od zvyšnej sumy ešte zostáva vydať 1€ (5 – 4 = 1). Sáčok s 2€ je veľa, a teda mu **nezostáva mu nič iné, než vydať sáčok s hodnotou 1€**. Zvýraznené tvrdenia boli vždy jedinou možnosťou v postupe. Preto jediný spôsob ako vydať 13€ je vydať sáčky s hodnotami 1€, 4€ a 8€.

Aké sumy vie Jonatán vydať bez otvárania sáčkov s hodnotami 1, 2, 4 a 8? (všetky čísla sú v €)

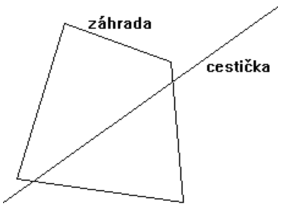
Ak by sme mali iba sáčky s hodnotami 1 a 2, vedeli by sme kombinovaním získať sumy 1(1), 2(2) a 3(1+2).

Pridajme teraz ďalší sáčok s hodnotou 4. Stále vieme kombinovaním získať sumy 1, 2, 3, pretože sme žiadny sáčok neodobrali. Ku každej s predošlých možností (1,2,3) môžeme teraz pridať aj hodnotu 4. Tým dostaneme sumy 5(1+4), 6(2+4) a 7(1+2+4). Navyše môžeme rátať aj samotný sáčok s hodnotou 4(4). Vieme teda získať sumy 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Pridajme teraz ďalší sáčok s hodnotou 8. Predchádzajúce sumy vieme stále získať, navyše nám pribudla suma 8(8). Opäť môžeme ku každej z predchádzajúcich možností (1,2,3,4,5,6,7) pridať aj novú hodnotu 8. Tým dostaneme sumy 9(1+8), 10(2+8), 11(1+2+8), 12(4+8), 13(1+4+8), 14(2+4+8), 15(1+2+4+8).

Kombinovaním sáčkov s hodnotami 1, 2, 4 a 8 **vieme získať** (a teda aj vydať) **sumy od 1 po 15**.

Úloha 5 (opravoval Maťo Bachratý)



Keď sa pozrieme na našu úlohu, tak najlepšie čo môžeme spraviť je skúsiť si niekoľko záhradiek nakresliť, a pokúsiť sa ich rozdeliť cestičkou na dva trojuholníky a jeden šesťuholník. Naše pokusy však zlyhajú na tom, že záhradku sa nám vždy podarí rozdeliť iba na dve časti(obrázok vľavo). Skúsme vymyslieť, prečo to tak je. Nuž, keď nám cez záhradku prejde cestička, tak nám to záhradku rozdelí na časť na jednej strane cestičky, a časť na druhej strane cestičky a žiadne tretia časť nám nemá kde vzniknúť.

Toto síce je pravda, ale iba v prípade, že cestička „vojde" do záhradky, ide cez ňu, a nakoniec z nej „víde". Čo ak by ale cestička do záhradky vošla, potom z nej vyšla, potom do nej znova vošla a nakoniec ešte raz vyšla? Platilo by aj teraz, že záhradku rozdelíme len na dve časti? Skúsme si takú záhradku nakresliť a uvidíme. Môže vyzerať napríklad ako záhradka na obrázku vpravo (záhrada má tvar podobný obrátenému V). Keď si nakreslíme takúto záhradku, do ktorej môže cestička vojsť, výsť, znova vojsť a znova výsť, tak ju ľahko rozdelíme na dva trojuholníky (A a B) a šesťuholník (C). **Predavač teda mohol mať pravdu.**