

SEZAMKO 2011/2012, Vzorové riešenia 2. série zimnej časti

Milí riešitelia,

ani sme sa nenazdali a po 10 úlohách je tu koniec zimnej časti našej súťaže. Sprievodca Jonatán je veľmi rád, že ste mu pomohli vyriešiť problémy, ktoré ho stretli. Či sa nedali riešiť aj iným spôsobom alebo lepšie sa dozvieme, ak si prečítate tieto vzorové riešenia.

S tými, ktorí dostanú pozvánku a budú môcť pricestovať, sa už za pár dní uvidíme na stretnutí najlepších riešiteľov v Žiline. Určite tam stretnete celý vlakový personál. Aj ak ich náhodou teraz nestretnete, začiatkom budúceho roka vám pošlú dopis s novými úlohami letnej časti súťaže SEZAMKO.

Na skoré stretnutie s vami sa tešia Jonatán, Jonatánka a organizátori.

Úloha 1 (opravovala Ajka Bachratá)

Najskôr si prehľadne zaznačíme čo vieme zo zadania. Vieme, že všetci okrem Arnošta mali dokopy 90 eur. Teda Bernard, Cyril a Denis majú spolu 90 eur. Podobne vieme prepísať aj ostatné vety:

Bernard, Cyril a Denis majú spolu 90 eur (1. súčet).

Arnošt, Cyril a Denis majú spolu 85 eur (2. súčet).

Arnošt, Bernard a Denis majú spolu 80 eur (3. súčet).

Arnošt, Bernard a Cyril majú spolu 75 eur (4. súčet).

Môžeme si všimnúť, že **Arnošt má najmenej**, pretože keď sa skladajú ostatní traja, tak majú spolu najviac.

Podobne **Denis má najviac**, pretože bez neho majú zvyšní traja spoločne najmenej. Pozrieme sa bližšie na rozdiel v 1. a 2. súčte. Líšia sa len v tom, že v 2. súčte je Bernard vymenený za Arnošta. Touto výmenou sa 1. súčet 90 eur zmenšil na 2. súčet 85 eur. Z toho vieme, že **Arnošt má o 5 eur menej ako Bernard** (alebo naopak povedané, Bernard má o 5 eur viac ako Arnošt).

Podobne sa pozrieme na 1. a 3. súčet. Líšia sa v tom, že v 3. súčte je Cyril vymenený za Arnošta. Touto výmenou sa súčet 90 eur zmenšil na súčet 80 eur, takže Arnošt do 3. súčtu prispel o 10 eur menej ako Cyril do 1. súčtu. **Arnošt teda má o 10 eur menej ako Cyril** (alebo naopak, Cyril má o 10 eur viac ako Arnošt).

Pozrieme sa teraz na 4. súčet. Skladali sa naň Arnošt, Bernard a Cyril. O nich sme už niečo vymysleli, tak to skúsme využiť. Povedzme si, že Arnošt prispel „niekoľko“. Potom vieme, že Bernard má o 5 eur viac ako „niekoľko“ a Cyril má o 10 eur viac ako „niekoľko“. Takže spolu majú trikrát „niekoľko“ a ešte 5 a 10 eur. Okrem toho vieme, že majú spolu 75 eur. Odoberme od oboch súčtov 5 a 10 eur, zostane nám, že trikrát „niekoľko“ je rovné $75 - 5 - 10 = 60$ eur. Takže „niekoľko“ je $60 : 3 = 20$ eur. **Arnošt prispel „niekoľko“**, teda **20 eur**. **Bernard prispel o 5 eur viac ako „niekoľko“**, teda $20 + 5 = 25$ eur a **Cyril prispel o 10 eur viac ako „niekoľko“**, teda $20 + 10 = 30$ eur.

Už potrebujeme zistiť iba koľko eur má Denis. To vieme napríklad z 1. súčtu. Bernard a Cyril dali spolu $25 + 30 = 55$ eur a do súčtu 90 eur ešte chýba Denisových 35 eur.

Takže jednotliví chlapi majú nasledovne veľa eur: Arnošt 20 eur, Bernard 25 eur, Cyril 30 eur a Denis 35 eur. Výsledné čísla môžeme postupne dosadiť do pôvodných súčtov, aby sme skontrolovali, či to máme naozaj dobre.

Ak ste príklad riešili skúšaním, tak sa treba zamyslieť aj nad tým, či môže platiť iba toto jedno riešenie, alebo sa dajú nájsť aj iné.

Úloha 2 (opravovala Lenka Trojaková)

Máme 7 muzikantov, od ktorých chce Jonatán získať podpisy na štyri plagáty. Zo zadania vieme, že muzikanti sa chcú na plagáty podpisovať len v určitom poradí, a to nasledovne: 1. **BEATF** 2. **DF** 3. **EA** 4. **CAD**

Jonatán ich chce navštíviť čo najmenej krát. Tak poďme vymyslieť „najúspornejšie“ navštevovanie!

Najviac informácií nám poskytuje prvý plagát, keďže je na ňom až 5 zo 7 muzikantov. Podľa neho vieme povedať, že za **B** má ísť Jonatán určite skôr, ako za **E**. Ďalej za **A** môže ísť až po **B** a **E**. Za **T** pôjde určite až po **B**, **E**, **A**. Za **F** pôjde z päťice muzikantov z prvého plagátu ako za posledným. A niekde medzi týchto 5 muzikantov (**B**, **E**, **A**, **T**, **F**) potrebujeme ešte zaradiť **C** a **D**.

Pozrieme sa teraz na tretí plagát. Z jeho poradia vidíme, že za **A** má Jonatán ísť až po **E**, čo sme však vedeli už z prvého plagátu. Takže keď dodržíme pravidlá prvého plagátu, tak pravidlá plagátu číslo 3 dodržíme určite tiež a už naň nemusíme myslieť.

Z informácie o štvrtom plagáte vieme, že **C** sa podpisuje pred **A**. Zatiaľ máme poradie **BEATF**. Kde všade môžeme zaradiť **C**? Máme niekoľko možností: pred **B**, medzi **B** a **E** alebo medzi **E** a **A**. Teda pre prvú časť podpisovania dostávame nasledujúce zoradenia: **CBEA**, **BCEA** a **BECA**. Skúste si teraz sami skontrolovať, či všetky tri spĺňajú podmienky zo zadania. Prezradím, že áno.

Poradie pre štvrtý plagát určuje aj to, že **D** musí ísť za **A**. Z prvého plagátu vieme, že čiastočné poradie za **A** je nasledovné: **ATF**. Z druhého plagátu vieme, že **D** musí dať podpis pred **F**. Kde všade vieme zaradiť **D** tak, aby bolo za **A** a pred **F**? Buď medzi **A** a **T** alebo medzi **T** a **F**. Čiže pre druhú časť získavania podpisov dostávame poradia **ADTF** alebo **ATDF**. Teraz nám už len stačí spojiť zoradenia pre prvú časť so zoradeniami pre druhú časť a dostaneme nasledujúce možnosti: **CBEADTF**, **BCEADTF**, **BECATDF**, **CBEATDF**, **BCEATDF**, **BECADTF**

A na koniec, aby sme si boli istí správnosťou svojho riešenia overíme, či všetky nájdené zoradenia spĺňajú podmienky zo zadania. Pre každé poradie sa pozrieme, či všetky 4 podmienky sedia a zistíme, že áno. Jonatán má teda 6 možností, ako môže dať podpísať plagáty, ak za každým z muzikantov pôjde len raz.

Keďže v zadaní sme chceli, aby ste našli nejaké poradie podpisovania, stačilo nájsť jedno. Tí, čo ich našli viac (až všetky), majú veéééekú pochvalu :)

Poznámka č.1: Veľa z vás malo správny výsledok, ale nenapísali ste postup riešenia a preto som strhávala bodíky. Nakoľko postup a odôvodnenie správnosti sú podstatnou súčasťou riešenia v SEZAMKovi a navyiac to bolo vyžadované aj v zadaní príkladu.

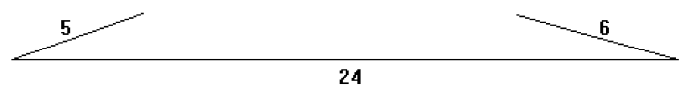
Poznámka č.2: Toto vzorové riešenie je do veľkej miery inšpirované riešením Majky Zelmanovej, ktorej nápad sa mi veľmi páčil :)

Úloha 3 (opravovala Kayči Čárska)

Jonatán s technikom mali v tomto prípade úlohu veľmi ľahkú – trojuholník zo scény nemuseli hľadať vôbec. **Žiadny taký neexistuje!** Väčšina z vás skúšaním prišla správne na to, že zadané podmienky by spĺňal trojuholník so stranami 5,6 a 24. Stačilo vyskúšať pár dĺžok strán: 1,2, a 8 (súčet 11), 2,3, a 12 (súčet 17), ... a čochvíľa dostanete ten správny výsledok – 5,6, a 24, pričom platí: $5 + 6 + 24 = 35$. Toto sa dalo zistiť aj pomocou rovníc. Avšak len niektorí z vás prišli na to, že takýto trojuholník sa narysovať nedá. Ak sa o to i pokúsite, kružnice, ktoré by sa mali preťať a vytvoriť posledný vrchol sa nepretnú.

Súčet dvoch kratších strán $5 + 6$ je menej než dĺžka tretej strany - 24 (pozrite si obrázok vpravo).

Neplatí tu trojuholníková nerovnosť, a preto takýto trojuholník neexistuje.



Úloha 4 (opravovala Kaťa Jasenčáková)

Túto úlohu môžeme vyriešiť dvomi spôsobmi. Vyškrtat' všetky možné dvojice číslíc a tak zistiť najväčší súčin, alebo sa zamyslieť nad tým, ktoré číslice sa určite neoplátajú vyškrtnúť a naopak, ktoré je určite výhodné vyškrtnúť. Pokúsme sa úlohu vyriešiť druhým spôsobom, ktorý nám šikovne ušetrí prácu.

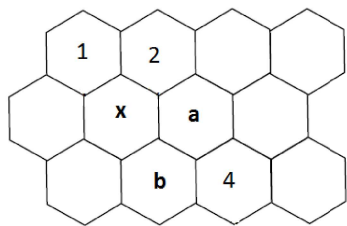
Dôležité je uvedomiť si, že **bud' môžeme vyškrtnúť 2 číslice z jedného čísla alebo po jednej číslici z oboch čísel**. Vyškrtnutím dvoch číslic z jedného čísla dostaneme jednociferné číslo. Keďže chceme získať čo najväčší súčin, tak číslo, čo nám ostane, musí byť to najväčšie z pôvodného čísla. Teda z čísla 532 by sme škrtnúť číslice 2 a 3. Tak by sme násobili čísla 5 a 179. Z čísla 179 by sme škrtnúť čísla 1 a 7 a tak by sme násobili čísla 532 a 9. Všimnime si, že 9 je viac ako 5 a 532 je viac ako 179. Takže **súčin čísel 532 a 9 je určite väčší ako súčin čísel 179 a 5**.

Ak by sme škrtnúť jednu číslicu z čísla 532 a jednu z čísla 179, tak je najvýhodnejšie škrtnúť najmenšie číslice, lebo tak dostaneme najväčšie dvojčiferné čísla, ktoré takýmto spôsobom môžeme dostať (53 a 79). A vynásobením najväčších čísel dostaneme najväčší súčin. Pozor, to, že treba škrtnúť najmenšie čísla neplatí nutne vždy! Ak by sme mali namiesto čísla 532 číslo 352, je výhodnejšie škrtnúť 3 ako 2, lebo $52 > 35$. No to nie je náš prípad, lebo 53 a 79 sú naozaj to najväčšie čo môžeme dostať (vyškrtne 2 a 1).

Teraz už len stačí zistiť súčin čísel 53 a 79 a čísel 532 a 9 a porovnať ich: $53 \times 79 = 4187$ $532 \times 9 = 4788$.

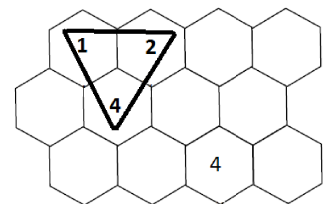
Najväčší súčet aký môžeme dostať je teda 4788.

Úloha 5 (opravoval Mojo Majdiš)



Najprv zistíme, aký musí byť súčet kvietkov v trojici hriadok susediacich vrcholom. Keďže v každej trojici hriadok je tento súčet rovnaký, tak vieme, že súčet kvietkov v hriadkach **a**, **b** a **x** je rovnaký ako súčet v hriadkach **a** a **b** zväčšený o 4 (pozri obrázok vľavo). Preto sú v hriadke **x** 4 kvietky.

Z vyznačenej oblasti na obrázku vpravo zistíme, že v každej trojici hriadok susediacich vrcholom je dokopy $1 + 2 + 4 = 7$ kvietkov. Čiže ak z trojice hriadok susediacich vrcholom poznáme počet kvietkov v dvoch, tak tretiu vieme dopočítať.



Skúste si teraz doplniť ostávajúce hriadky sami. V prípade, že vám to nepôjde, alebo si len chcete skontrolovať správny výsledok, tak jeden z postupov vyplňania je na obrázku dole. Ak z hriadky **k** smeruje šípka do hriadky **l**, tak počet kvietkov v hriadke **l** sme odvodili pomocou počtu kvietkov v hriadke **k**.

