

JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU  
SEZAMKO, školský rok 2016/17, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí riešitelia,

veríme, že sa už pasujete s príkladmi z druhej zimnej série tohtoročného SEZAMKA. Alica a Maťo sa veľmi potešili všetkým vašim riešeniami. Taktiež dúfajú, že im pomôžete aj s ďalšími problémami, na ktoré natrafia v hoteli Nekonečno. Popri počítaní nových úloh si môžete rozhábať vaše matematické svaly pri čítaní týchto vzorových riešení.

Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypíňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke [www.sezam.sk](http://www.sezam.sk)

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

### Príklad č. 1 (opravoval Mojo Majdiš)

Aby sa nám možnosti neplietli, vždy budeme ukladať kartičky tak, že prvá bude najmenšia, druhá bude prostredná a posledná kartička bude s najväčším číslom.

Ak dáme na prvé miesto 0, tak musíme nájsť dve kartičky, ktoré spolu dávajú súčet 15. Sú dve možnosti: 6 a 9, 7 a 8. Ak na prvé miesto vyberieme kartičku s číslom 1, tak hľadáme dve kartičky, ktorých súčet bude 14. Opäť nájdeme 2 možnosti: 5 a 9, 6 a 8. Keď na prvé miesto dáme kartičku s číslom 2, tak hľadáme možnosti, ako z dvoch kartičiek zložiť  $15 - 2 = 13$ . Tu už nájdeme tri možnosti, a to 4 a 9, 5 a 8, 6 a 7. Keď za najmenšiu kartičku vyberieme 3, tak druhá najmenšia kartička môže byť 4, vtedy je najväčšia kartička 8, alebo 5, vtedy je najväčšia kartička 7 (rozmyslite si, prečo 6 a viac na druhej najväčšej kartičke byť nemôžu). Ak je najmenšia kartička 4, tak ďalšie dve najmenšie, ktoré k nej vieme pripojiť, sú 5 a 6. A tieto tri kartičky dávajú spolu súčet 15. Preto keď ľubovoľnú zväčšíme a ostatné kartičky nezmenšíme (lebo také možnosti sme už prebrali), tak nám už vyjde niečo väčšie ako 15. Napríklad keď zväčšíme druhú kartičku na 6, tak dostávame minimálne  $4 + 6 + 7 = 17$ . Keď napríklad zväčšíme prvú kartičku na 5, tak dostaneme minimálne  $5 + 6 + 7 = 17$ .

**Našli sme teda všetky možnosti a bolo ich dokopy 10.**

### Príklad č. 2 (opravovala Ajka Bachratá)

Mám zistiť, aký je obsah čiernej časti podlahy na obrázku. Pri riešení použijem obrázok. Aby sa mi s obrázkom ľahšie pracovalo, tak urobím zopár úprav. Pomocou obrysov dlaždíc naznačených na okrajoch obrázka dokreslím ako vyzerajú celé dlaždice a očíslujem si ich. Potom ľahko spočítam, že všetkých dlaždíc je 12. Každá dlaždica má veľkosť  $1\text{m} \times 1\text{m}$ , takže obsah jednej dlaždice je  $1\text{m}^2$  (1 meter štvorcový). Obsah celej podlahy je obsah 12 dlaždíc a to je  $12\text{m}^2$ .

Teraz môžem spočítať obsah čiernej časti podlahy. Stačí mi spočítať koľko by to bolo čiernych dlaždíc a obsah bude toľko isto metrov štvorcových. Dlaždice číslo 6 a 7 sú celé čierne, takže ich môžem rovno započítať. Už mám 2 čierne dlaždice. Na ostatných dlaždiciach je aj čierna aj biela farba.

Keď sa pozriem len na dlaždice číslo 1 a 2, tak vidím, že biela a čierna časť majú rovnaký obsah (môžem si to overiť napríklad tak, že dlaždice rozstrihnem na bielu a čiernu časť a keď ich položím na seba, tak budú rovnako veľké). Takže polovica z týchto dvoch dlaždíc je biela a polovica je čierna. Dokonca z nich viem poskladať jednu bielu a jednu čiernu dlaždicu – keď zoberiem čiernu časť z dlaždice číslo 2 a vymením ju s bielou časťou z dlaždice číslo 1. Takže do celkového počtu čiernych dlaždíc môžem pridať 1 ďalšiu.

Rovnako, len pootáčané vyzerajú aj dvojice dlaždíc 3 a 4, dvojica 9 a 10 a dvojica 11 a 12. Každú z nich tiež vieme zložiť na 1 bielu a 1 čiernu dlaždicu. Takže nám pribudnú 3 čierne dlaždice (jedna z 3 a 4, druhá z 9 a 10 a tretia z 11 a 12).

Už sme spočítali všetko okrem čiernej časti na dlaždiciach 5 a 8. Tie sú rovnaké, len jedna je otočená dole hlavou. Aby sme vedela zistiť obsah čiernej časti, tak si túto dlaždicu rozdelím na polovicu. Vidím, že mi vznikli štyri malé rovnaké trojuholníky – dva biele a dva čierne. Keď ich poprehadzujem, tak mi vyjde polovica dlaždice biela a polovica dlaždice čierna. To isté viem urobiť s dlaždicou číslo 8 a dokopy dostanem štyri biele a štyri čierne trojuholníky. Po ich vhodnom poprehadzovaní medzi dlaždicami 5 a 8 viem vyrobiť 1 celú bielu a 1 celú čiernu dlaždicu.

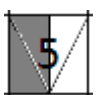
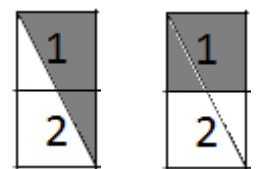
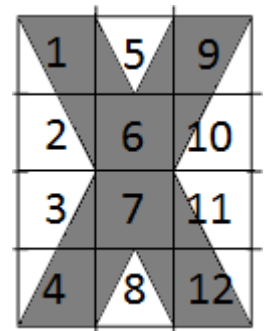
Keď skontrolujem obrázok, tak zistím, že už sme spočítali čierne časti na všetkých dlaždiciach. Takže ich už len musím spočítať dokopy. Mám  $2 + 1 + 3 + 1 = 7$  čiernych dlaždíc. Každá má obsah  $1\text{m}^2$  takže spolu majú obsah  $7\text{m}^2$ .

**Obsah čiernej časti na obrázku je  $7\text{m}^2$ .**

### Príklad č. 3 (opravovala Ľudka Šimková)

V hoteli bývajú štyria Taliani: Alberto, Benito, Cecília a Donatello. Vieme, že aspoň jeden z nich vie piecť pizzu. Poďme sa postupne pýtať, kto by to mohol byť?

Alberto to byť nemôže, lebo z 2. v zadaní vieme, že pizzu nevie robiť. Ostávajú nám ešte traja. Čo ak vie pizzu robiť Cecília? Potom ešte aspoň dvaja ďalší vedia robiť pizzu. Ostali nám už len Benito a Donatello, takže to musia byť títo dvaja. Ak vie robiť pizzu Cecília, vie ju robiť aj Benito a Donatello. Skontrolujeme, že platí aj 3. podmienka zo zadania a máme prvú možnosť: pizzu vie robiť Cecília, Benito aj Donatello.



Čo ak vie robiť pizzu Benito? Potom ešte aspoň jeden ďalší vie robiť pizzu. Na výber máme Cecíliu a Donatella. Ak by to bola Cecília, musia ju vedieť robiť všetci traja (teda aj Donatello) a takú možnosť sme už povedali. Nech ju Cecília nevie robiť. Potom ten jeden môže byť iba Donatello. Máme ďalšiu možnosť: pizzu vie robiť Benito a Donatello. A platí 3), ak vie robiť pizzu Benito, vie ju robiť aj Donatello.

Takže už máme preskúmané dve možnosti, keď pizzu vie robiť Cecília alebo Benito. Ak ani jeden z nich nevie robiť pizzu, ostáva nám už iba Donatello. Posledná možnosť teda je, že pizzu vie robiť iba Donatello. Aj táto možnosť vyhovuje všetkým podmienkam.

Všetky možnosti, kto vie robiť pizzu, ktoré môžu nastať, sú: vie ju robiť Cecília s Benitom a Donatellom, alebo Benito s Donatellom, alebo sám Donatello. Vidíme, že Donatello vie piecť pizzu v každej z týchto možností. Cecília s Benitom môžu ale nemusia vedieť a Alberto určite nevie.

**Donatello určite vie piecť pizzu a Alberto určite nevie. O Cecílii a Benitovi nevieme s istotou povedať ani jedno.**

#### **Príklad č. 4 (opravovala Kaťa Jasenčáková)**

Číslo 34 môžeme vytvoriť napríklad tak, že budeme násobiť dvomi toľkokrát, až dostaneme číslo väčšie ako 34. Potom skúsime odčítavať číslo 3.

$$\begin{aligned}5 \cdot 2 &= 10 \\10 \cdot 2 &= 20 \\20 \cdot 2 &= 40\end{aligned}$$

Teraz budeme postupne odčítavať číslo 3.

$$\begin{aligned}40 - 3 &= 37 \\37 - 3 &= 34.\end{aligned}$$

Hurá! Dostali sme číslo 34.

Takže platí  $34 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 3 - 3$ . Číslo 34 môžeme dostať tak, že stlačíme najprv trikrát červené tlačítko a potom dvakrát modré tlačítko. Niektorí ste postupovali odzadu. Všimli ste si, že  $34 = 17 \cdot 2$  a ako sa dá dostať číslo 17 z čísla 5 už bolo napísané v zadaní. Je to  $17 = 5 \cdot 2 \cdot 2 - 3$ . Teda  $34 = (5 \cdot 2 \cdot 2 - 3) \cdot 2$ . To znamená, že najprv stlačíme dvakrát červené tlačítko, potom raz modré a raz červené tlačítko.

Teraz sa pozrime, ako sa dá dostať číslo 86 z čísla 5. Mnohí ste postupovali odzadu. Ukážeme si jedno z takýchto riešení. Postupovať odzadu vlastne znamená, že budeme deliť dvomi a pripočítavať trojku. Všimli ste si, že  $86 \div 2 = 43$ . Teda skúšali ste dostať číslo 43 a potom ste ho vynásobili dvojkou. Číslo 43 nie je deliteľné dvomi. Pripočítajme teda trojku, dostaneme  $43 + 3 = 46$ . Stále skúsime postupovať tak, že keď dostaneme číslo deliteľné dvojkou, tak ho vydělíme dvojkou. Inak pripočítame 3.

$$\begin{aligned}46 \div 2 &= 23 \\23 + 3 &= 26 \\26 \div 2 &= 13 \\13 + 3 &= 16 \\16 \div 2 &= 8 \\8 \div 2 &= 4 \\4 \div 2 &= 2\end{aligned}$$

Už nebudeme deliť dvojkou, pretože  $2 + 3 = 5$ .

Ako teda mohla postupovať Alica? Začneme od čísla 5 a tam, kde sme pripočítavali 3 budeme odčítavať 3 a tam, kde sme delili dvojkou budeme dvojkou násobiť.

$$\begin{aligned}5 - 3 &= 2 \\2 \cdot 2 &= 4 \\4 \cdot 2 &= 8 \\8 \cdot 2 &= 16 \\16 - 3 &= 13 \\13 \cdot 2 &= 26 \\26 - 3 &= 23 \\23 \cdot 2 &= 46 \\46 - 3 &= 43 \\43 \cdot 2 &= 86\end{aligned}$$

Takže z čísla 5 vieme dostať číslo 86 tak, že stlačíme postupne M Č Č Č M Č M Č M. V našom zápise M znamená modré tlačítko a Č je červené tlačítko.

Dá sa dostať z čísla 5 číslo 36? Po dlhom skúšaní sa nikomu z vás nepodarilo získať číslo 36. Ako je to možné? Podarilo sa vám získať čísla 34, 35, 37 aj 38. Čím je číslo 36 špeciálne? Niektorí ste si všimli, že 36 je deliteľné číslom 3. No číslo 5 nie je deliteľné číslom 3. Ani číslo 2 nie je deliteľné číslom 3. Ak vynásobíme dve čísla, ktoré nie sú deliteľné číslom 3, nemôžeme dostať číslo deliteľné číslom 3. Teda iba stláčaním červeného tlačítka nedostaneme číslo deliteľné číslom 3. Modré tlačítko odčítava číslo 3. Ak však odčítame 3 od čísla, ktoré nie je násobkom čísla 3 (teda nie je deliteľné trojkou), opäť dostaneme číslo, ktoré nie je deliteľné trojkou. Teda nech stláčame tlačítko akokoľvek, nikdy nedostane číslo deliteľné trojkou. Preto nikdy nemôžeme dostať číslo 36 z čísla 5.

**Z čísla 5 vieme dostať číslo 34 stlačením napr. Č Č Č M M, číslo 86 stlačením napr. M Č Č Č M Č M Č M. Číslo 36 sa nám nepodarí dostať nikdy.**

Nezabudnite na blížiace sa stretnutie riešiteľov, ktoré sa po ukončení a vyhodnotení 2. série uskutoční v sobotu 10.12.2016 v Žiline!