SEZAMKO 2017/2018, Vzorové riešenia 2. série letnej časti

Milí riešitelia,
ani sme sa nenazdali a už sa nám treba s vami rozlúčiť. Opravili sme totiž poslednú sériu SEZAMKa v tomto školskom roku. S tými, ktorým sa darilo najviac, sa ale ešte lúčiť nemusíme, lebo sa s nimi stretneme už onedlho na sústredení v Rajeckej Lesnej.
Laura a Marek vám všetkým veľmi pekne ďakujú za všetky matematické problémy, s ktorými ste im pomohli. V septembri k vám (ak ste nám v hlavičkách písali správnu adresu) zavítajú noví rozprávkoví hrdinovia.
Nechajte sa prekvapiť, kto to bude tentoraz. Pokiaľ ste už šiestaci alebo primania a SEZAMKa budúci rok podľa pravidiel nebudete môcť riešiť, nesmúťte. Väčší brat SEZAMKa – volá sa SEZAM, na Vás určite bude myslieť a pošle vám svoje zadania. Aby ste budúci rok patrili k tým najlepším, nezabudnite si prečítať aj tieto vzorové riešenia…
Úspešný koniec školského roka a pekné prázdniny vám želajú všetci vedúci SEZAMKa

Príklad č. 1 (opravovala Maťa Kudelčíková)

Aby sme vedeli rozdeliť jedlo na olovrant, potrebujeme zistiť, koľko jednotlivé veci – šišky (Š), lístky (L) a bukvice (B) vážia. Keďže všetky šišky sú rovnako ťažké, všetky lístky sú rovnako ťažké a aj všetky bukvice sú rovnako ťažké, tak nemusíme počítať pre každú jednu šišku, bukvicu a každý jeden lístok, koľko váži, stačí nám vypočítať to všeobecne. Zo zadania vieme, že **jedna bukvica váži 1 gram**. Ďalej vieme, že

4L = 10B / :2
2L = 5B / :2
L = 2,5B = 2,5 gramu.

Tu však vidíme, že na to, aby sme mali celočíselnú váhu lístkov (bukvice, brezové lístky ani šišky sa pri delení nesmú lámať ani trhať na menšie časti), musíme ich vždy rozdeliť tak, aby ich mal každý škriatok párny počet. Už vieme váhu bukvíc aj lístkov, poďme sa pozrieť teda na váhu posledného jedla – šišiek.

Š = 2L + 3B
Š = 2 · 2,5 + 3 · 1 = 8 gramov.

Spolu máme preto 15B + 8L + 5Š = 15 · 1 + 8 · 2,5 + 5 · 8 = 15 + 20 + 40 = 75 gramov jedla. Chceme ich rozdeliť spravodlivo medzi troch škriatkov, preto **každý z nich dostane** 75 ÷ 3 = = **25 gramov jedla**.

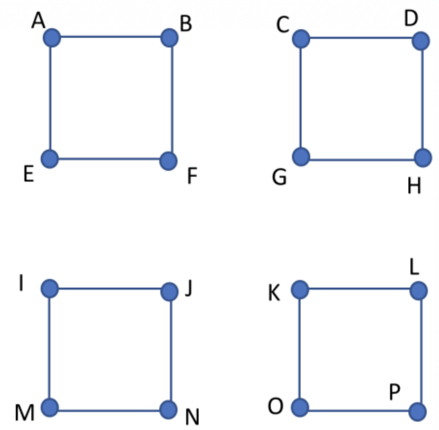
Aby sa nám jedlo delilo medzi škriatkov dobre, najskôr rozdelíme šišky, ktoré sú najťažšie, potom pridáme párny počet lístkov a bukvice. Musíme však dávať pozor na to, aby mal každý škriatok 25 gramov jedla a zároveň, aby sme medzi škriatkov rozdelili všetko jedlo čo máme – 15 bukvíc, 8 lístkov a 5 šišiek. Možností ako to rozdeliť je mnoho, dá sa to aj napríklad takto:

1. škriatok: 3Š + 0L + 1 B = 3 · 8 + 1 · 1 = 25 gramov.
2. škriatok: 2Š + 2L + 4B = 2 · 8 + 2 · 2,5 + 4 · 1 = 25 gramov.
3. škriatok: 0Š + 6L + 10B = 6 · 2,5 + 10 · 1 = 25 gramov.

1. škriatok: 2Š + 2L + 4B = 2 · 8 + 2 · 2,5 + 4 · 1 = 25 gramov.
2. škriatok: 2Š + 2L + 4B = 2 · 8 + 2 · 2,5 + 4 · 1 = 25 gramov.
3. škriatok: 1Š + 4L + 7B = 1 · 8 + 4 · 2,5 + 7 · 1 = 25 gramov.

1. škriatok: 0Š + 8L + 5B = 8 · 2,5 + 5 · 1 = 25 gramov.
2. škriatok: 3Š + 0L + 1 B = 3 · 8 + 1 · 1 = 25 gramov.
3. škriatok: 2Š + 0L + 9B = 2 · 8 + 9 · 1 = 25 gramov.

Príklad č. 2 *(opravovala Iva Jančigová)*



Z kôpok sa dajú vytvoriť štyri malé štvorce, ktoré nemajú žiadnu kôpku spoločnú (hovorí sa tomu, že nemajú prienik). To znamená, že **určite treba zobrať aspoň 4 kôpky** (z každého z týchto štvorcov jednu), aby sme tieto štvorce porušili. Ak sa nám podarí nájsť taká štvorica kôpok, ktorá poruší aj všetky ostatné štvorce, tak sme hotoví. Aby sa nám o nich lepšie rozprávalo, označme si kôpky písmenami A, B, ..., P.

Na zrušenie najväčšieho štvorca, potrebujeme odstrániť jednu z kôpok A, D, M, P, napríklad A. Je úplne jedno, ktorý roh si vyberieme, lebo otočením celej situácie by sme na tom boli rovnako. Potom potrebujeme odstrániť jeden z vrcholov F, H, P, N. Nebude to F, lebo to by sme si minuli dve kôpky na štvorec ABFE. Keby to bola kôpka H alebo N, tak nám ostane neporušený štvorec BCGF, v prípade H, alebo EGMO, v prípade N. Takže musíme zobrať P.

Teraz odstráňme jednu z kôpok štvorca FGKJ. Zo štvorcov AHFE a KLPO sme už kôpky vybrali, takže to nebude kôpka F ani K. Následne je jedno, či si vyberieme J alebo G (zrkadlová situácia), tak nech je to J. Potom ale na štvorec EGOM musíme zobrať aj G.

Vybrali sme teda kôpky A, P, J, G. Pozornou kontrolou zistíme, že už máme pokryté všetky štvorce.

Takže najmenší potrebný počet kôpok na porušenie všetkých štvorcov je 4.

Poznámka k riešeniu:

Niektorí z vás skúšaním našli štvoricu kôpok, ktorá spĺňa zadanie, ale to ešte nestačí. Úplné riešenie musí odpovedať aj na otázku, prečo sa to nedá na menej.

Príklad č. 3 *(opravoval Hynek Bachratý)*

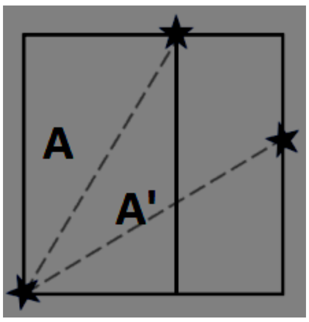
V úlohe ČAJ + JAČ + AJČ = 555 sme mali nahradiť tri použité písmenká tromi rôznymi ciframi tak, aby všetky čísla boli trojciferné a ich súčet bol 555. Po chvíli skúšania asi každý zistil, že sa mu tieto podmienky nedarí splniť. Dôležité a bodované bolo hlavne to, ako presne sa vám to podarilo vysvetliť.

Niektorí skúšali dosádzať všelijaké cifry a vychádzalo im, že nemôžu byť všetky rôzne. Pri tom ale bolo treba preskúšať dosť veľa kombinácií, a to nebolo ľahké urobiť kompletne.

Najjednoduchšie riešenie pritom bolo dosť stručné. Stačilo si všimnúť tri cifry Č, J, A na prvých miestach, teda miestach stoviek. Žiadna z nich nemôže byť 0, inak by príslušné číslo nebolo trojciferné. A keďže musia byť rôzne, **najmenšie** môžu byť tieto čísla 1,2 a 3. Potom ale jedno z trojciferných čísel je aspoň 100, druhé z nich aspoň 200 a tretie z nich aspoň 300. Potom ale ich súčet bude aspoň 600, a teda sa určite nemôže rovnať 555.

Odpoveď na Teodorovu hádanku je, že také čísla neexistujú.

Príklad č. 4 *(opravovala Lenka Hudecová)*



Máme jaskyňu tvaru štvorca s rozmermi 12 m × 12 m, ktorú chceme dvomi rovnými stenami (ako na obrázku) rozdeliť na tri plochou rovnako veľké miestnosti. Máme zistiť, v akej vzdialenosti od rohu jaskyne majú byť body označené hviezdičkami.

Zistime na začiatok, akú plochu majú mať vzniknuté izby. Celá jaskyňa má 12 m × 12 m = 144 m^2. Jedna izba má teda 144 : 3 = 48 m^2.

Miestnosť A má tvar pravouhlého trojuholníka, ktorého jedna strana je aj strana štvorca (pôvodná stena jaskyne). Táto strana je teda dlhá 12 m. Keď miestnosť A dokreslíme na obdĺžnik ako na obrázku (A + A'), tak vieme, že tento obdĺžnik má obsah 2 × 48 = 96 m^2. Jedna jeho strana je 12 m. Dĺžka druhej strany tohto obdĺžnika je potom 96 m^2 : 12 m = 8 m.

Horná hviezdička je preto vzdialená 8 m od ľavého horného rohu jaskyne a tým pádom 4 m od toho pravého. To isté platí aj pre spodnú hviezdičku (ako miestnosť A by sme označili trojuholník vpravo dole a celý postup by sme zopakovali).