JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVI. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2022/2023, 1. zimná séria

Vzorové riešenia

***Úloha č. 1** (opravovali Timea Jakubócyová a Jiří Szotkowski)*

Vieme, že robot Artur každé písmeno zašifruje na jednociferné alebo dvojciferné číslo a používa pritom iba číslice 1, 2 a 3. Dokopy teda vie vytvoriť 12 rôznych šifier: 1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32 a 33. Vytvoríme si tabuľku, kde si budeme postupne zapisovať písmená k šifrám, ktoré sme už rozlúštili.

1	2	3	11	12	13	21	22	23	31	32	33

Robot Artur zašifroval slovo ROBOT ako 3112131233. Skúsime z tohto čísla zistiť šifry pre písmená R, O, B a T. Číslo 3112131233 má 10 cifier a slovo ROBOT má 5 písmen. Keďže 10 : 5 = 2, vyzerá to, že každé písmeno v slove ROBOT by mohlo byť zašifrované na dvojciferné číslo. Poďme overiť, či to tak naozaj musí byť. Keby nejaké písmeno v slove ROBOT bolo zašifrované na jednociferné číslo, ostatné štyri písmená Artur dokáže zašifrovať najviac na 4 · 2 = 8 cifier. Je to preto, lebo Artur každé písmeno šifruje na jednociferné alebo dvojciferné číslo. To je spolu 1 + 8 = 9 cifier, ale číslo 3112131233 má 10 cifier. Takže nemôže nastať možnosť, že niektoré písmeno v slove ROBOT je zašifrované na jednociferné číslo. Teda všetky písmená v slove ROBOT sú zašifrované na dvojciferné čísla. Z toho už vieme zistiť šifry pre písmená R, O, B, T: R = 31, O = 12, B = 13, T = 33. Tieto písmená teraz vieme doplniť do tabuľky:

1	2	3	11	12	13	21	22	23	31	32	33
				O	B				R		T

Teraz sa pozrieme na slová KROKODIL a BEGEMOT. Pre každé slovo si tiež vytvoríme tabuľky, kde si budeme zapisovať šifry k písmenám, ktoré sme už rozlúštili. Do tabuliek si hneď vieme doplniť šifry k písmenám R, O, B, T:

K	R	O	K	O	D	I	L
	31	12		12			

B	E	G	E	M	O	T
13					12	33

Slová KROKODIL a BEGEMOT sú zašifrované rovnako. Vidíme, že slovo BEGEMOT má na začiatku číslo 13. Takže aj slovo KROKODIL musí mať na začiatku číslo 13. Teda písmeno K je zašifrované buď na číslo 1, alebo na číslo 13. Číslo 13 je však už použité pre písmeno B a vieme, že rôzne písmená sú zašifrované rôznymi číslami. Preto písmeno K musí byť zašifrované na číslo 1.

Pozrime sa na koniec slov KROKODIL a BEGEMOT. Slovo BEGEMOT má na konci číslo 33, teda aj slovo KROKODIL musí mať na konci číslo 33. Takže písmeno L je zašifrované buď na číslo 3, alebo na číslo 33. Číslo 33 je už použité pre písmeno T, takže písmeno L je zašifrované na číslo 3.

Z písmen O a T v slove BEGEMOT vidíme, že písmeno I v slove KROKODIL je zašifrované na číslo 3 alebo 23. Šifra 3 je už použitá pre písmeno L, teda písmeno I je zašifrované na číslo 23.

1	2	3	11	12	13	21	22	23	31	32	33
K		L		O	B			I	R		T

K	R	O	K	O	D	I	L
1	31	12	1	12		23	3

B	E	G	E	M	O	T
13					12	33

Zo slova KROKODIL vidíme, že písmeno E v slove BEGEMOT je zašifrované na číslo 1 alebo 11. Šifra 1 je už použitá pre písmeno K, teda písmeno E je zašifrované na číslo 11.

Písmeno G môže byť následne zašifrované na číslo 2 alebo 21. Ak by G bolo zašifrované na 21, pre druhé písmeno E v slove BEGEMOT by zostali cifry 1 a 2. To nesedí, lebo písmeno E je zašifrované na číslo 11. Takže písmeno G je zašifrované na číslo 2.

1	2	3	11	12	13	21	22	23	31	32	33
K	G	L	E	O	B			I	R		T

K	R	O	K	O	D	I	L
1	31	12	1	12		23	3

B	E	G	E	M	O	T
13	11	2	11		12	33

Zostali nám ešte písmená M a D. Z písmená O v slove BEGEMOT vieme, že šifra písmená D musí končiť na cifru 1. Jediné číslo, ktoré končí na cifru 1 a ešte sme ho nepoužili, je číslo 21. Teda písmeno D je zašifrované na číslo 21. Teraz poznáme zašifrovanie celého slova KROKODIL. Keďže slová KROKODIL a BEGEGMOT sú zašifrované rovnako, vieme doplniť šifru písmená M. Písmeno M je teda zašifrované na číslo 22.

1	2	3	11	12	13	21	22	23	31	32	33
K	G	L	E	O	B	D	M	I	R		T

K	R	O	K	O	D	I	L
1	31	12	1	12	21	23	3

B	E	G	E	M	O	T
13	11	2	11	22	12	33

V slove MATEMATIKA poznáme šifry všetkých písmen okrem písmená A. Vidíme, že jediné číslo, ktoré ešte nebolo použite, je číslo 32. Takže je len jedna možnosť, ako môže byť zašifrované písmeno A, a to číslom 32. Teraz vieme zašifrovať celé slovo MATEMATIKA:

M	**A**	**T**	**E**	**M**	**A**	**T**	**I**	**K**	**A**
22	**32**	**33**	**11**	**22**	**32**	**33**	**23**	**1**	**32**

Väčšina z vás nemala problém sa dopracovať k správnemu výsledku. Často ste však zabúdali na vysvetlenie, ako sú zašifrované písmená v slove ROBOT. Prípadne ste ako dôvod napísali, že číslo 3112131233 má 10 cifier a slovo ROBOT má 5 písmen, čo nestačí. Ďalšia častá chyba bolo vysvetlenie zašifrovania písmená K. Písali ste, že K je 1, lebo slovo BEGEMOT začína na číslo 13 a cifra 3 je už v písmene R. To nám však nič nehovorí o tom, prečo by písmeno K nemohlo byť 13.

Úloha č. 2 **(***opravovala Ivka Hrivová***)**

Našou úlohou je nájsť najmenšie a najväčšie trojciferné číslo, pre ktoré platí, že súčet cifier je prvočíslo a súčinom cifier je tretia mocnina prirodzeného čísla. Pozrime sa najskôr na rozpätie čísel prichádzajúcich do úvahy. Keďže ide o trojmiestne čísla, najväčšie číslo je 999, teda najväčšia možná hodnota ciferného súčtu je 9 + 9 + 9 a najmenšie číslo je 100 s ciferným súčtom 1. Prvočísla ktoré budeme uvažovať pri úvahách o cifernom súčte sú teda tie nachádzajúce sa medzi 1 a 27. Súčinom cifier musí byť prirodzene číslo. Prirodzenými číslami sú všetky celé kladné čísla, teda čísla 1, 2, 3, 4, ...

Súčin cifier každého čísla od 100 do 110 je 0, keďže aspoň jedna cifra v každom čísle je nula. Vzhľadom na to, že 0 nie je prirodzené číslo, najmenšie trojciferné číslo prichádzajúce do úvahy je prvé trojciferné číslo neobsahujúce nulu, čiže 111. Pozrime sa na toto číslo bližšie. Jeho ciferný súčin je 1 · 1 · 1 = 1 čo je prirodzené číslo a jeho ciferný súčet je 1 + 1 + 1 = 3 čo je prvočíslo. Keďže vieme, že číslo 111 je najmenšie číslo prichádzajúce do úvahy, žiadne menšie číslo nebude spĺňať všetky podmienky našej úlohy a preto je 111 jej najmenším riešením.

Poďme sa pozrieť na to najväčšie. Aby súčtom troch cifier bolo prvočíslo, a zároveň každá cifra mala hodnotu aspoň 1, najmenšie prvočíslo ktorému sa môže rovnať ciferný súčet je 3. Každé vyššie prvočíslo je určite nepárne a tak aj ciferný súčet 3 cifier bude musieť byť nepárny. Aby tri čísla v súčte dávali nepárne číslo, jedna alebo všetky tri cifry budú musieť byť nepárne. Možné súčiny cifier prichádzajúce do úvahy sú $1^3, 2^3, 3^3, \dots, 9^3$ (keďže máme rozpätie hodnôt čísel od 111 do 999). Všetky cifry nemôžu byť rovnaké, pretože potom by bol súčet rovný 3 · 1,3 · 2,3 · 3, … alebo 3 · 9, čo určite prvočíslo okrem prvého najmenšieho prípadu nebude. Aspoň dve cifry preto musia byť rôzne, a buď je jedna z nich nepárna, alebo sú všetky nepárne.

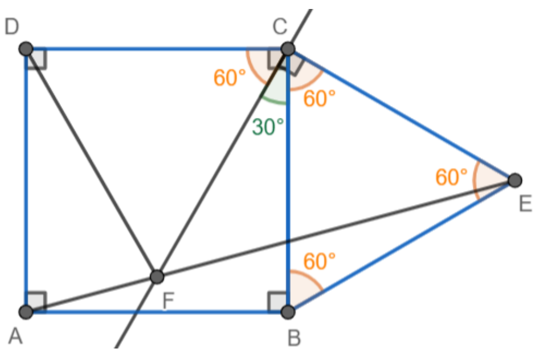
Keďže chceme nájsť najväčšie číslo, pôjdeme od čísla 999 postupne nižšie a nižšie a prvé číslo, ktoré bude spĺňať všetky podmienky je naším hľadaným riešením.

	997	995	993	991	988	986	984	982	979	977	975	973	971	968	966	964
Súčet	25	23	21	19	25	23	21	19	25	23	21	19	17	23	21	19
Súčin	567	405	243	81	576	432	288	144	567	441	315	189	63	432	342	216

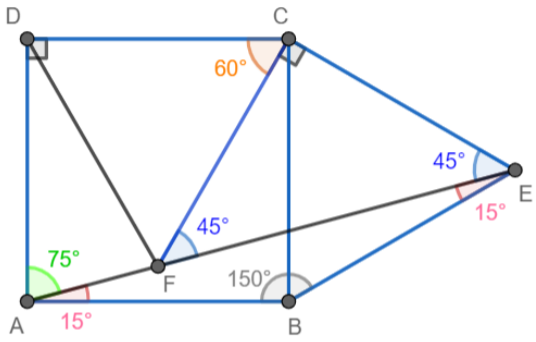
Môžeme si všimnúť, že všetky čísla od 997 zostupne až po 966 nespĺňajú aspoň jednu z podmienok. Nasledujúce číslo je 964, ktorého ciferný súčet je 19 a jeho ciferný súčin je 216 = 6^3, čo vyhovuje obom podmienkam. Keďže sme postupovali spôsobom prehľadávania čísel od najväčšieho a hľadali iba čísla spĺňajúce všetky podmienky úlohy, hodnota 964 je skutočne najväčšia možná.

Úloha č. 3 **(***opravovali Števka Glevitzká, Ivka Varsányiová a Gabika Ježíková***)**

Keďže našou úlohou je nájsť veľkosť uhla AFD, doplňme si (do obrázka) uhly, čo poznáme zo zadania a skúsme dopočítať ďalšie. Štvorec ABCD má všetky vnútorné uhly pravé a keďže trojuholník BEC je rovnostranný, všetky jeho vnútorné uhly majú 60°. Z toho rovno vieme dopočítať, že uhly ABE a DCE majú oba 150°. Taktiež zo zadania vieme, že uhol ECF je pravý. Navyše, uhol EFC sa skladá z uhlov ECB (60°) a BCF, a preto má uhol BCF veľkosť 30°. Z toho potom ľahko zistíme, že uhol FCD má 60°.



Avšak len so samotným počítaním uhlov by sme sa nezaobišli. Potrebujeme využiť aj informácie, čo máme o dĺžkach strán. Totiž keďže štvorec a rovnostranný trojuholník BEC majú spoločnú stranu, všetky ich strany majú navzájom rovnakú dĺžku. Keď si všetky rovnaké dĺžky zaznačíme do obrázka (modrou), ľahko spozorujeme, že trojuholník ABE je rovnoramenný. Preto sú uhly BAE a BEA rovnako veľké. Tretí uhol v trojuholníku ABE poznáme, už si stačí len spomenúť, že súčet veľkostí vnútorných uhlov v každom trojuholníku je 180°. A tak vieme vypočítať, že uhly BAE a BEA majú 15°. Zrazu sa nám objavili ďalšie uhly, ktorých veľkosť vieme vypočítať. Skúste si rozmyslieť, že vieme ľahko spočítať, že uhol FAD má 75° a uhol FEC má 45°.



Pozrime sa teraz bližšie na trojuholník FEC. Práve sme spočítali, že pri vrchole E je 45° a tiež vieme, že pri vrchole C máme pravý uhol. Teda môžeme znova použiť fakt, že súčet uhlov v trojuholníku je 180°, a tak zistíme, že aj pri vrchole F je 45°. Hľa, v trojuholníku FEC máme dva uhly rovnakej veľkosti, a preto musí byť rovnoramenný, konkrétne strany CE a CF sú rovnako dlhé.

Takže aj stranu CF si v obrázku vyfarbíme namodro a hneď zbadáme, že trojuholník DCF je tiež rovnoramenný (lebo úsečka CF je rovnako dlhá ako úsečka CE a zároveň CE je rovnako dlhá ako úsečka CD). Teda opäť, uhly CDF a CFD sú rovnako veľké, tretí uhol má 60°, súčet všetkých troch je 180°, a tak si dopočítame, že uhly CDF a CFD majú 60° (čo znamená, že trojuholník CDF je rovnostranný).

Asi vytušíme, že už sme len kúsok od dorátania výsledku, stačí si len vybrať, ktorou cestou sa vydáme. Jeden z možných spôsobov je pozrieť sa, že priamy uhol AFE (180°) sa skladá z uhlov AFD (ktorý chceme zistiť), DFC (60°) a CFE (45°). Alebo môžeme dopočítať, že uhol ADF (ako 90° − 60°) a opäť použiť, že trojuholník AFD má súčet uhlov 180°. Jedným či druhým spôsobom sa dostaneme k odpovedi, že uhol AFD má 75°.

Viacerí riešitelia si situáciu len narysovali a uhol odmerali. Tento postup môže veľmi pomôcť odhadnúť správny výsledok. Avšak pri rysovaní sa nám mohol papier pohnúť, ceruzka bola príliš tupá a taktiež pohľadom na uhlomer nezistíme úplne presne, aký veľký je uhol (vedeli by ste rozlíšiť medzi 74,9° a 75,2°?). Preto sa nedá sa naň spoliehať, že odmeraná veľkosť je správna.

***Úloha č. 4** (opravovala Lenka Hudecová)*

Začneme tým, že preberieme možnosti, koľko rôznych počtov rúk mohli tvory mať. Ak by mali všetky tvory rovnaký počet rúk, pri každom podaní rúk by Svetluška spočítala rovnaký počet rúk, čiže by sme nedostali dva rôzne súčty. Tým pádom museli mať aspoň dva rôzne počty rúk.

Ak by mali tvory 2 rôzne počty rúk, jeden z tých počtov sa musí vyskytovať 3 alebo viac krát. Označme ho A. Tým pádom existuje kombinácia tvorov [A, A, A], ktorá má súčet rúk A + A + A = 3 · A. Tento súčet nemôže byť 16, pretože 3 · A je deliteľné tromi, no 16 nie je. Tým pádom A = 6. Ak druhý počet rúk označíme B, tak určite existuje aj kombinácia tvorov [A, A, B], a tá musí mať súčet 16, takže B = 4. Počet tvorov s počtom rúk B nemôže byť zastúpený viac ako jeden krát, lebo potom by existovala kombinácia [A, B, B] so súčtom 14, no my vieme, že máme iba dva možné súčty rúk.

Ak by mali tvory 3, 4 alebo 5 rôznych počtov, aspoň jedno z čísel sa musí opakovať aspoň 2 krát. Označme tento počet A. Následne označme B a C ďalšie čísla rôzne od A aj od seba navzájom. Potom vieme vytvoriť kombinácie [A, B, C], [A, A, B] a [A, A, C], ktoré budú určite rôzne. Premyslite si, prečo je to tak!

Ak by mal každý tvor iný počet rúk, mali by sme 6 rôznych počtov. Ak ich zoradíme od najmenšieho po najväčšie a označíme A, B, C, D, E a F tak [A, B, C], [B, C, D] a [C, D, E] budú podobne ako v predošlom prípade určite 3 rôzne súčty.

Jediné riešenie čo sme objavili je teda situácia, kedy majú šiesti tvorovia po 6, 6, 6, 6, 6 a 4 rúk. Keďže sme prešli všetky možnosti, vieme s istotou povedať, že iné riešenie neexistuje.