JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXVI. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2022/2023, 2. zimná séria
Vzorové riešenia

***Úloha č. 1** (opravoval Matúš Hladký)*

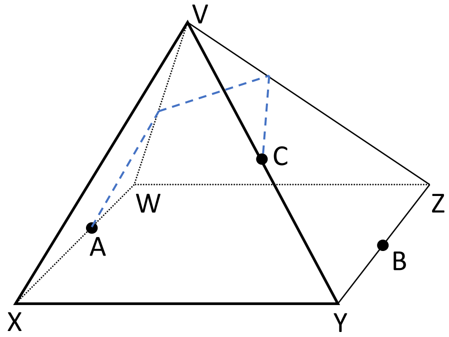
Máme **10** ostrovov, pričom hocijaké dva z nich majú priamo medzi sebou buď jeden most, alebo žiadny. Ideme teda zistiť, aké sú možnosti pre počty mostov z ostrovov. Najviac môže mať ostrov **9** mostov, ak je spojený so všetkými. Najmenej môže mať **0** mostov, keď nie je spojený so žiadnym ostrovom. Keďže môže mať aj hociktorý počet mostov medzi týmito číslami, tak máme dohromady **10** možností na počty mostov. Preto ak má mať každý z ostrovov iný počet mostov, musíme využiť všetky tieto možnosti od **0** po **9**.

Aby mal každý ostrov iný počet mostov, tak nejaký by musel mať **9** mostov a zároveň nejaký iný **0**. To je ale problém. Ak má nejaký ostrov **9** mostov, tak je spojený so všetkými ostatnými, te teda majú tiež aspoň jeden most. Jeden z tých ostrovov ale nemá mať ani jeden most, takže máme spor. Preto vieme, že legenda nie je pravdivá a také kráľovstvo nemohlo existovať.

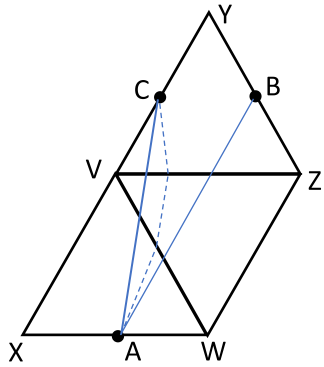
Okrem toho si vieme všimnúť, že keď spočítame mosty ktoré vychádzajú z jednotlivých ostrovov, tak to podľa prvého odseku musí byť **0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45**. Každý most má pri tom dva začiatky, po jednom na oboch ostrovoch, ktoré spája. Preto ak postavíme jeden most, tak pridáme dva začiatku. Môžeme si ale všimnúť, že **45** je nepárne číslo, a teda nevieme urobiť toľko mostov aby sme splnili legendu. Preto legenda nemôže byť pravdivá.

***Úloha č. 2** (opravovala Erika Novotná)*

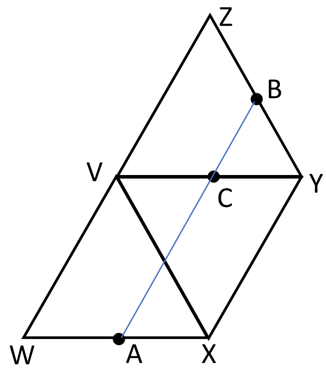
Vo všeobecnosti je známe, že najkratšia spojnica ľubovoľných dvoch bodov **X, Y** je úsečka **XY**, ktorá tieto dva body priamo spája. My sa však v našich úvahách musíme pohybovať po povrchu pyramídy, napr. ako po prerušovanej čiare na obrázku vpravo. Drevári vlastne chodia po povrchu tejto pyramídy, preto aj nám pri ďalšom počítaní pomôže nakresliť si jej sieť do roviny:



Vidíme, že naša navrhnutá trasa (prerušovaná) na tejto konkrétnej sieti nie je najkratšia – v prípade tejto siete je najkratšia priama spojnica bodov **A** a **C**. Zároveň na tejto sieti môžeme načrtnúť a ľahko vypočítať dĺžku trasy **AB**. Keďže všetky steny pyramídy sú rovnostranné trojuholníky, uhol pri vrchole **V** je priamy **(3 · 60°)** a teda **XWZY** je štvoruholník. Navyše nie taký hocijaký, ale rovnoramenný lichobežník so základňami **|XY| = 200 m** a **|WZ| = 100 m** (uhly pri vrcholoch **X** a **Y** sú **60°** a uhly pri vrcholoch **W** a **Z** sú **120°**). Čiže dĺžka **|AB|** je dĺžka strednej priečky v tomto lichobežníku, teda **150 m**. Zároveň body, kde čiara **AB** pretína hrany **VW** a **ZV**, sú stredy týchto strán.



Ak by sme však z bodu **A** do bodu **C** išli cez prednú stenu, vyzeral by obrázok a najkratšia trasa inak. Pozorovaním uhlov vo štvoruholníku **WXYV** (pri vrcholoch **W** a **Y** sú uhly **60°** a pri vrcholoch **V** a **X 120°**) a rovnako dlhých strán by sme zistili, že **WXYV** je kosoštvorec. Keďže **AC** je stredná priečka tohto kosoštvorca, jej dĺžka je nutne **100 m**. Všimnime si, že poloha bodu **B** sa vzhľadom na polohu bodu **A** ani pri tejto sieti nijako nezmenila. Takisto z argumentácie vyššie vyplýva, že bod **C** leží na úsečke **AB** (lebo **AB** prechádza stredmi strán trojuholníkov a **C** je stred strany).



Jednoduchým odmeraním dĺžok by sme mohli zistiť, že priama spojnica bodov **AC** v prvej sieti je dlhšia ako tá v druhej sieti – preto ako riešenie vezmeme tú kratšiu z nich. Samozrejme sa to aj dopočítať, ale pre nedostatok priestoru to vo vzorovom riešení neuvádzame (môžete si skúsiť túto dĺžku vypočítať sami, nápomocná vám bude Pytagorova veta). Výsledkom je, že najkratšia trasa z bodu **A** do bodu **B**, resp. **C**, vedie cez stred hrany **VX** a bod **C** a jednotlivé dĺžky týchto trás sú **|*AB*| = 150 m** a **|*AC*| = 100 m.**

***Poznámka:** V tomto riešení nám stačí pre úplnosť uvažovať dve siete vyššie. Ak sa v budúcnosti stretnete ešte niekedy s takýmto typom úloh, skúste zdôvodniť, prečo práve vami vybratá sieť je tá vhodná na hľadanie najkratšej trasy. Napríklad aj v našej úlohe, ak by sme mohli uvažovať aj spodnú stenu, mala by úloha úplne iný výsledok a postup.*

Úloha č. 3 *(opravoval Adam Kňaze)*

V tejto úlohe sa skúšaním všetkých možností podarilo nájsť správny výsledok väčšine z vás. Veľa možností sa však dalo vylúčiť aj bez skúšania a mohli ste si tak ušetriť robotu. Vo vzoráku si teda ukážeme nie len ako sa dala úloha vyriešiť, ale aj ako sa to dalo spraviť efektívne.

Aby sa nám nad úlohou ľahšie rozmýšľalo môžeme začať tým, že si ju mierne prepíšeme. Delenie je opakom násobenia, algebrogram na dverách teda môžeme prepísať nasledovne:

1 * * * * : * 5 = 3 * * (pôvodné zadanie)

3 * * · * 5 = 1 * * * * (rovnaká úloha zapísaná ako násobenie)

Prvá vec, ktorú si môžeme všimnúť je, že druhý činiteľ má na mieste jednotiek cifru 5. Vieme teda, že súčin bude deliteľný piatimi. Čísla deliteľné piatimi sa vždy končia cifrou 0 alebo 5. Keďže cifra 5 je už v algebrograme použitá, ostáva len cifra 0 a teda vieme, že posledná cifra súčinu bude 0. Môžeme ju teda doplniť.

3 * * · * 5 = 1 * * * 0

Teraz sa zameriame na druhý činiteľ. Chýba nám v ňom len jedna cifra, tak by to nemuselo byť až také náročné. Na mieste desiatok v ňom môžu byť ešte nepoužité cifry 2, 4, 6, 7, 8, 9. Vieme, že prvý činiteľ môže byť najmenej 324 (najmenšie číslo, ktoré vieme vyskladať z ostávajúcich cifier) a najviac 398. Do druhého činiteľa doplníme cifru 2 a skúsime vypočítať súčin: 398 · 25 = 9950. Vidíme, že aj keď sme použili najväčší možný prvý činiteľ, výsledok nie je päťciferný. Dvojka preto nemôže byť na prvom mieste v druhom činiteli.

Skúsme teraz štvorku: 398 · 45 = 17910. Súčin je päťciferný a začína jednotkou, to sedí. Skúsme ďalej cifru šesť: 398 · 65 = 25870. To už je príliš veľa, prvá cifra súčinu je 2, nie 1. Pre istotu ešte vyskúšajme vynásobiť najmenším možným prvým činiteľom: 324 · 65 = 21060. Stále príliš veľa, môžeme teda povedať, že ani 6 nemôže byť na prvom mieste v druhom činiteli. Zároveň môžeme povedať, že ani cifry 7, 8 a 9 nebudú vyhovovať, lebo sú väčšie ako 6. Ak by sme ich použili, súčin by bol už len väčší a tým pádom by stále nevyhovoval algebrogramu. Môžeme teda doplniť cifru 4 ako jedinú možnosť.

3 * * · 4 5 = 1 * * * 0

Ďalej si môžeme všimnúť, že súčin končí na cifru 0 a teda je párne číslo. Druhý činiteľ končí na 5 takže je nepárny. Aby mohol byť súčin párny, musí byť aspoň jeden činiteľ párny. Preto vieme, že prvý činiteľ musí byť párny a teda musí končiť na párnu cifru. Ostávajú nám také len 2, 6 a 8.

Na miesto desiatok v prvom činiteli môžeme dosadiť ešte päť nepoužitých cifier, na miesto jednotiek máme tri možnosti. To dáva dokopy 15 kombinácií, ktoré vieme rýchlo vyskúšať. Niektoré z nich môžeme ešte preskočiť kvôli opakujúcim sa cifrám, reálne teda vypočítame len 12 príkladov:

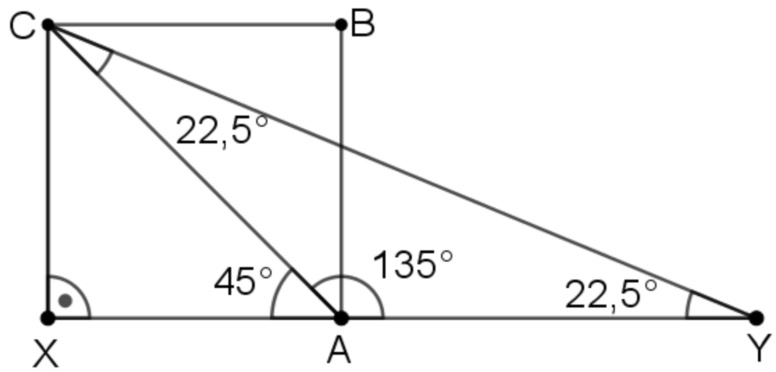
326 · 45 = 14670	362 · 45 = 16290	372 · 45 = 16740	382 · 45 = 17190	392 · 45 = 17640
328 · 45 = 14760	368 · 45 = 16560	376 · 45 = 16920	386 · 45 = 17370	**396 · 45 = 17820**
		378 · 45 = 17010		398 · 45 = 17910

Práve jeden z príkladov je taký, že sa v ňom neopakuje žiadna cifra dvakrát a to je presne ten príklad, ktorý sme hľadali. Keď ho prepíšeme naspäť do originálneho tvaru dostávame riešenie algebrogramu na dverách:

1 7 8 2 0 : 4 5 = 3 9 6

Úloha č. 4 (*opravovali Jožtek Rajník, Matúš Jonaštík a Ondrej Belan****)***

Ako pri takýchto úlohách býva zvykom, je dobré začať náčrtom. Okrem úsečky **XY** si doňho načrtneme aj výsledný štvorec, ktorý chceme narysovať. V takomto obrázku si totiž môžeme povšímať veci, ktoré nám pri rysovaní pomôžu. My si výsledný štvorec načrtneme ako štvorec **XABC**, kde bod **A** leží na úsečke **XY**. Aby sme takáto štvorec narysovali, musíme nájsť body **A**, **B**, **C**. Môžete si rozmyslieť, že ak nájdeme jeden z týchto bodov, tak štvorec už ľahko zvládneme dokončiť. Takže najťažšie bude nájsť prvý z nich. Máme veľa možností, s ktorým bodom začať a vaše riešenia boli v tomto naozaj pestré. Dokonca výsledný štvorec si môžeme načrtnúť aj úplne inak. Spôsob, ktorý tu opíšeme, rozhodne nie je jediný.



My začneme s bodom **C**. O bode **C** totiž niečo už vieme: musí ležať na kolmici na úsečku **XY** cez bod **X**. Nevedeli by sme teda o bode **C** ešte niečo zistiť? Vieme, že úsečky **AC** a **AY** majú byť rovnako dlhé. Tie nám vytvoria rovnoramenný trojuholník **AYC**. V štvorci a rovnoramennom trojuholníku sa nám dobre počítajú veľkosti uhlov. Preto si rovnoramenný trojuholník **AYC** dokreslíme do náčrtu. Poďme sa teraz pozrieť na uhly, či nám nepovedia niečo užitočné.

Uhol **CAX** bude mať veľkosť **45°**, lebo uhlopriečka v štvorci rozpoľuje jeho pravé uhly. Potom uhol **CAY** je k nemu susedný a preto bude mať veľkosť **180° − 45° = 135°**. V rovnoramennom trojuholníku **ACY** majú uhly **ACY** a **AYC** rovnakú veľkosť, ktorú vieme vypočítať ako **(180° − 135°) : 2 = 22,5°**. Tým sme zistili, že uhol **XYC** má veľkosť **22,5°**. To je super správa, lebo s jeho pomocou vieme narysovať druhú priamku **YC**, na ktorej má bod **C** ležať. A dve priamky nám svojim priesečníkom jednoznačne určia, kde nájdeme bod **C**.

Vieme však bez uhlomera rysovať priamky pod uhlami **90°** či **22,5°**? Na toto nám postačí rysovať osi uhlov. Pokiaľ ste sa s tým ešte nestretli, tak os uhla vieme narysovať nasledovne: Kružidlo zapichneme do vrchola uhla a pomocou neho vyznačíme na ramenách uhla dva body (tie teda budú v rovnakej vzdialenosti od vrchola). Z každého z týchto dvoch bodov spravíme kružnicu s rovnakým polomerom. Na záver spravíme priamku cez ich priesečník a vrchol uhla, čím dostaneme os uhla. Kolmicu tak vieme narysovať ako os priameho uhla (**180°**). Uhol veľkosti **22,5°** zas trojitým použitím osi uhla na priamy uhol – tak z neho postupne dostaneme **90°**, **45°** a na koniec **22,5°**.

Na záver opíšeme samotný postup konštrukcie:

1. Narysujeme priamku **p** kolmú na úsečku **XY** prechádzajúcu cez bod **X**.
2. Narysujeme polpriamku **YZ** tak, aby uhol **XYZ** mal veľkosť **22,5°**. Túto polpriamku si pomenujeme **q**.
3. Na priesečníku priamky **p** a polpriamky **q** vyznačíme bod **C**.
4. Narysujeme kružnicu **k** so stredom v bode **X** a polomerom **|XY|**.
5. Na prieniku kružnice **k** a úsečky **XY** vyznačíme bod **A**.
6. Narysujeme priamku **r** kolmú na úsečku **XY** prechádzajúcu cez bod **A**.
7. Narysujeme priamku **s** kolmú na úsečku **XC** prechádzajúcu cez bod **C**.
8. Na priesečníku priamok **r** a **s** vyznačíme bod **B**.
9. Narysujeme výsledný štvorec **XABC**.