SEZAM, školský rok 2018/19, vzorové riešenia 2. letnej série

Milí riešitelia,
do rúk sa k vám práve dostali zadania tretej, a teda poslednej letnej série tohtoročného SEZAMu. Reno, Magdaléna, Jacob, Diana a Arcus sa veľmi potešili všetkým vašim riešeniam. Zároveň na vás čaká posledná sada úloh, s ktorými potrebujú pomôcť. Využite poslednú možnosť zabojovať o čo najlepšie umiestnenie vo finálnom poradí. Tí najúspešnejší z vás sa môžu tešiť na letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 9. až 18. augusta. Pred tým než sa pustíte do riešenia úloh, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia, určite vám to pomôže.
Nakoniec vás ešte chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

***Príklad č. 1** (opravoval Adam Kňaze)*

Jacob a Diana nenatierali Arkusov plot veľmi efektívne, väčšinu dosiek viac krát premaľovávali. Nás však zaujíma len aká farba bola na doske keď skončili. Najprv premaľovali násobky jednotky (na bielo), potom násobky dvojky, potom trojky a tak ďalej. Keď sa pozrieme na jednu konkrétnu dosku, vieme povedať, že bola premaľovaná toľko krát, koľko má deliteľov (lebo na každého deliteľa bola raz premaľovaná). Taktiež si môžeme všimnúť, že to akú má farbu doska na konci závisí iba od toho akú paritu má počet jej deliteľov. Dosky s párnym počtom deliteľov budú modré a dosky s nepárnym počtom deliteľov budú biele.

Dobre teda, teraz potrebujeme zistiť koľko čísel bude mať párny a koľko nepárny počet deliteľov. Delitele čísla majú jednu zaujímavú vlastnosť – vždy sa vyskytujú po dvojičkách. Totiž, ak má číslo x deliteľa a pričom $x : a = b$, vieme, že aj b bude deliteľ čísla x (lebo $x : b = a$). Čísla a a b sú dvojičky, ktoré sa nezaobídu jedna bez druhej. Ak existuje jedna musí aj druhá.

Keďže sa delitele vždy vyskytujú po dvojičkách, teoreticky by potom každé číslo malo mať párny počet deliteľov. Existuje však jedna výnimka, a to prípady, kde sú obe čísla v dvojičke rovnaké. Napríklad číslo 16 má delitele 1 a 16, 2 a 8, a potom 4. Číslo 4 má dvojičku samé seba, preto číslu 16 pridá iba jedného deliteľa. Takto dostaneme číslo s nepárnym počtom deliteľov a teda bielu dosku. Už nám len stačí spočítať koľko takých čísel bude v Arkusovom plote. Budú to čísla $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, …, $10 \cdot 10 = 100$ (teda druhé mocniny prirodzených čísel). Týchto je 10, zvyšných 90 dosiek teda bude modrých. Hotovo.

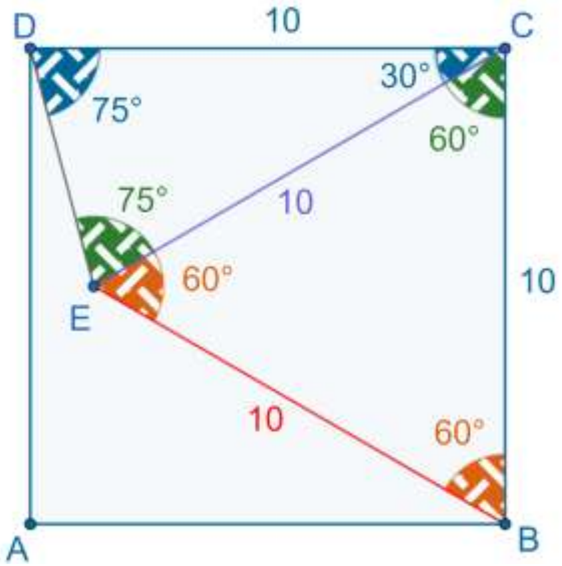
V plote bolo nakoniec 10 bielych a 90 modrých dosiek.

Poznámka k riešeniu:

V úlohách tohto typu, kde potrebujeme niečo zistiť pre veľký počet čísel (tu je to 1 až 100) sa väčšinou oplatí vypísať si niekoľko prvých čísel a pozrieť sa čo sa tam deje. Mnohí z vás ste si tak všimli, že biele sú vždy druhé mocniny. Následne je ale rovnako dôležité ukázať prečo to, čo ste si všimli, bude vždy platiť. Ak to neukážete, tak nevieme či to platí vždy, alebo len na číslach ktoré ste vyskúšali.

***Príklad č. 2** (opravovali Timea Jakubócyová a Miloš Mičík)*

Na obrázku je modrou zaznačené všetko, čo vieme zo zadania.



Pozrime sa najskôr na trojuholník DEC. Zo zadania vieme dva jeho vnútorné uhly, a keďže
vieme, že súčet uhlov v trojuholníku je vždy 180°,vieme si vypočítať veľkosť tretieho uhla:

$$|\angle CED| + |\angle DCE| + |\angle EDC| = 180°$$
$$|\angle CED| = 180° - |\angle DCE| - |\angle EDC|$$
$$|\angle CED| = 180° - 30° - 75°$$
$$|\angle CED| = 75°$$

Teraz vidíme, že trojuholník DEC má dva vnútorné uhly rovnako veľké. Znamená to, že je rovnoramenný so základňou DE. Dĺžky jeho ramien EC a DC teda musia byť zhodné, takže $|EC| = |DC|$, a teda $|EC| = 10$m.

V trojuholníku EBC vieme vypočítať uhol pri vrchole C. Vieme, že každý z vnútorných uhlov štvorca je pravý, teda má veľ kosť 90°. Teda aj $|\angle DCB| = 90°$. A keďže úsečka CE rozdeľuje tento uhol na dve časti, veľkosť uhla DCB je súčtom veľkostí uhlov DCE a ECB. Veľkosť uhla DCE poznáme, takže vieme vypočítať veľkosť uhla ECB:

$$|\angle DCE| + |\angle ECB| = |\angle DCB|$$
$$|\angle ECB| = |\angle DCB| - |\angle DCE|$$
$$|\angle ECB| = 90° - 30°$$
$$|\angle ECB| = 60°$$

Pozrime sa na trojuholník EBC. Vidíme, že dve z jeho strán (EC a BC) sú rovnako dlhé, čo znamená, že je rovnoramenný so základňou EB. Znovu použijeme fakt, že súčet uhlov v trojuholníku je 180°, a že v rovnoramennom trojuholníku majú uhly pri základni rovnakú veľkosť :

$$|\angle BEC| = |\angle CBE|$$
$$|\angle CBE| + |\angle ECB| + |\angle BEC| = 180°$$
$$|\angle ECB| + 2\,|\angle BEC| = 180°$$
$$2 \cdot |\angle BEC| = 180° - |\angle ECB|$$
$$2 \cdot |\angle BEC| = 180° - 60°$$
$$2 \cdot |\angle BEC| = 120°$$
$$|\angle BEC| = |\angle CBE| = 60°$$

Zistili sme, že oba uhly pri základni sa rovnajú 60°. Avšak aj tretí uhol trojuholníka má 60°. To znamená, že trojuholník EBC je rovnostranný, a teda všetky jeho strany majú rovnakú dĺžku. Preto $|EB| = |EC| = |BC| = 10$m.

Chodník EB je dlhý 10 metrov.

Príklad č. 3 (*opravovala Ajka Kucharíková*)

Nevieme aká presne hrubá bola Magdina kniha. Preto chceme zistiť, ako vyzerajú všetky Renove obľúbené čísla. Potom by sme vedeli spočítať koľko ich je pre hocijako hrubú knihu.

Skúsme vypísať prvých pár čísel z knihy. Prvá strana má číslo 1 a na každej ďalšej strane je číslo o tri väčšie: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, **22**, 25, … . Už sme našli jedno Renove (obľúbené) číslo 22. Takto by sme mohli vypisovať donekonečna, ale trvalo by to moc dlho. Skúsme sa radšej zamyslieť, či nevieme o číslach strán niečo viac.

Keby mala prvá strana číslo 0, tak by sme dostali čísla strán 0, 3, 6, 9, 12, 15, …, teda násobky čísla tri. Keďže sme začali od strany číslo 1, tak dostávame čísla strán o 1 väčšie ako násobok čísla tri: 1, $4 = 3 + 1$, $7 = 6 + 1$, $10 = 9 + 1$, $13 = 12 + 1$ atď. Takže čísla, ktoré môžu byť na niektorej strane knihy, sú také čísla, ktoré dávajú po delení troma zvyšok 1.

Pripomeňme si pravidlá deliteľnosti tromi. Číslo je deliteľné tromi práve vtedy, ak je aj jeho ciferný súčet deliteľný tromi. Taktiež platí, že ak k číslu pripočítam násobok trojky, tak sa jeho zvyšok po delení tromi nezmení. Ak mám napríklad číslo, čo po delení tromi dá zvyšok 2, a pripočítam k nemu 33, tak aj nové číslo dá po delení tromi zvyšok 2 (rozmyslite si prečo). Teraz skúsime zistiť, ktoré Renove čísla dávajú po delení troma zvyšok jedna.

Pozrime sa najskôr na Renove čísla zo samých jednotiek. Sú to čísla 11, 111, 1111, 11111, 11111, 111111, ... Pozrime sa, čo sa stane, ak k číslu v tvare 111…111 pripíšeme zľava tri jednotky. Pripísanie troch jednotiek je vlastne to isté, ako keď k číslu pričítame číslo 111000…000 (počet núl je rovný počtu jednotiek v pôvodnom čísle). No a toto pripočítané číslo má ciferný súčet tri, takže je deliteľné tromi. To znamená, že nové číslo dáva po delení troma rovnaký zvyšok ako pôvodné číslo.

Číslo 11 dáva po delení troma zvyšok dva, takže nie je Renove číslo. Ak k nemu pripíšeme tri cifry 1, tak sa jeho zvyšok po delení troma nezmení. Preto ani číslo 11111 nie je Renove číslo. No a podobný argument môžeme opakovať. Teda ani číslo zložené z 8 cifier 1 nie je Renove číslo, ani z 11 cifier 1, atď. Takže čísla, ktorých počet jednotiek dáva po delení troma zvyšok dva, nikdy nebudú Renove čísla. Podobne to bude s číslami, ktorých počet jednotiek je deliteľný tromi. Začneme číslom 111, ktoré nie je Renove číslo, lebo po delení troma dávam zvyšok nula. No a k tomuto číslu môžeme postupne pridávať po troch jednotkách, takže postupne dostaneme všetky možné čísla s počtom jednotiek deliteľným troma. A všetky tieto čísla budú dávať po delení troma zvyšok nula, takže žiadne z nich nebude Renove číslo. Ako posledné otestujme číslo 1111. Toto číslo je Renove číslo, keďže $1111 = 370 \cdot 3 + 1$. Pridaním troch jednotiek na začiatok sa zvyšok 1 po delení troma nezmení, takže aj číslo 1111111 bude deliteľné troma. A opäť môžeme tento krok opakovať. Renove čísla zložené zo samých jednotiek sú teda také viacciferné čísla, ktorých počet cifier dáva zvyšok 1 po delení troma.

Rovnaký postup ako pre cifru 1 môžeme zopakovať pre čísla zložené iba z cifier 2, iba z cifier 4, iba z cifier 5, iba z cifier 7 a iba z cifier 8. Aj v týchto prípadoch je pripísanie troch cifier na začiatok to isté ako pričítanie čísla, ktoré má na začiatku tri rovnaké cifry, a potom veľa núl (zamyslite sa prečo je takéto číslo vždy deliteľné troma, bez ohľadu na to akú cifru použijeme). Stačí nám teda pre každú cifru otestovať čísla zložené z dvoch, troch a štyroch cifier a zistiť, ktoré z nich dáva po delení troma zvyšok 1.

Pre cifru 2 to je číslo 22. Takže Renove čísla zložené zo samých dvojok sú také viacciferné čísla, ktorých počet cifier dáva zvyšok 2 po delení troma.

Pre cifru 4 to je číslo 4444. Takže Renove čísla zložené zo samých štvoriek sú také viacciferné čísla, ktorých počet cifier dáva zvyšok 1 po delení troma.

Pre cifru 5 to je číslo 55. Takže Renove čísla zložené zo samých pätiek sú také viacciferné čísla, ktorých počet cifier dáva zvyšok 2 po delení troma.

Pre cifru 7 to je číslo 7777. Takže Renove čísla zložené zo samých sedmičiek sú také viacciferné čísla, ktorých počet cifier dáva zvyšok 1 po delení troma.

Pre cifru 8 to je číslo 88. Takže Renove čísla zložené zo samých osmičiek sú také viacciferné čísla, ktorých počet cifier dáva zvyšok 2 po delení troma.

Čísla zložené iba z cifier 3, iba z cifier 6, alebo iba z cifier 9 testovať nemusíme. Hociktoré z týchto čísiel je totiž násobok čísla tri (skúste overiť prečo to tak je), takže žiadne z nich nebude Renove číslo.

Takže sme našli všetky možné Renove čísla. Teraz kebyže vieme, koľko má kniha strán, tak vieme presne povedať, koľko v nej bude Renových čísel, a ktoré čísla to sú.

Príklad č. 4 (*opravoval Hynek Bachratý*)

Včela mala obliezť všetky hrany 5-bokého hranola, ktorý mal dĺžku hrany podstavy 3cm a dĺžku hrán medzi podstavami 5cm. Všetky hrany preto spolu mali dĺžku $5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 55$cm. Na menej centimetrov sa to teda určite nedá. Ale nepôjde to ani na 55. Prečo?

Problém je v počte hrán, ktoré sa stretávajú vo vrcholoch hranola. Vrcholov je spolu 10, a v každom sa stretnú 3 hrany. Pokiaľ vo vrchole lienka začína svoju cestu, nemusí to byť problém. Jednou hranou z vrcholu odíde, a neskôr druhou príde a treťou odíde niekam ďalej. Podobne sa dá zvládnuť aj posledný vrchol jej cesty. Jednou hranou najskôr príde, druhou odíde, a nakoniec treťou príde a skončí obliezanie.

Zostalo ale ešte 8 vrcholov, v ktorých lienka nezačína ani nekončí. Prvou hranou do každého z nich vojde, druhou odíde, a treťou zase príde. V takomto vrchole už ale nesmie zostať, a musí ešte raz odísť. Po tejto štvrtej hrane ale pôjde druhý raz. Niektoré cesty si teda zopakuje, a dĺžka jej cesty preto bude viac ako 55cm.

Koľko ciest najmenej si takto musí zopakovať? Opakovanú štvrtú cestu cez vhodnú hranu musí spraviť spolu v 8 vrcholoch hranola. Ak ale každá hrana povedie medzi dvomi z týchto vrcholov, mohli by stačiť 4 „opakovacie" hrany.

A koľko cm bude musieť takto pridať? Ak by všetky 4 potrebné hrany boli na podstavách, stačilo by pridať $4 \cdot 3 = 12$cm. Spolu by tak lienke stačilo prejsť $55 + 12 = 67$cm. Dá sa ale tento najmenší počet centimetrov dosiahnuť? Našťastie dá, a to viacerými spôsobmi.

Tu popíšeme len ten najjednoduchší. Lienka pristane na niektorom vrchole, a potom obíde celú jemu prislúchajúcu podstavu ($5 \cdot 3 = 15$cm). Potom prejde (5cm) na druhú podstavu, a tiež ju celú obíde (ďalších $5 \cdot 3 = 15$cm). Teraz jej zostalo prejsť ešte zvyšné štyri 5 centimetrové spojnice hornej a dolnej podstavy. To môže postupne urobiť, ale treba si dať pozor, aby sa medzi nimi presúvala (druhý krát) len po 3 centimetrových hranách podstáv.

Nakreslite si obrázok a skontrolujte si, že pri tomto postupe naozaj prejde dva krát len po 4 hranách dĺžky 4cm, a teda spolu prelezie 67cm. Tento najmenší možný výsledok sa jej tak podarí dosiahnuť, a ide o správnu odpoveď.