JSMF Žilina, Fakulta riadenia a informatiky ŽU

SEZAM, školský rok 2019/20, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí riešitelia,
veríme, že sa už pasujete s príkladmi z druhej zimnej série tohtoročného SEZAMu. Lucy, Anke, Gallo a Pierre sa veľmi potešili všetkým vašim riešeniam. Taktiež dúfajú, že im pomôžete aj s ich ďalšími problémami, na ktoré natrafia pri svojich dobrodružstvách v okolí dedinky Hadar. Popri počítaní nových úloh si môžete precvičiť vaše matematické bunky pri čítaní týchto vzorových riešení.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 *(opravoval Hynek Bachratý)*

Našou úlohou je doplniť 8 chýbajúcich čísel do štvorca 4x4 tak, aby sme v každom z deviatich štvorcov 2x2 dostali rovnaký súčet.

	1	8	
6			2
2		10	
	6		5

Veľkým pomocníkom k tomu pre mnohých z Vás boli neznáme a rovnice. Mohli ste použiť osem neznámych, pre ktoré ste z rovnosti súčtov v štvorcoch dostali dostatok rovníc a vedeli zistiť ich hodnoty. Pokiaľ ste súčty štvorcov porovnávali priebežne, stačili vám neznáme dve alebo len jedna. Pokiaľ ste ale začali porovnávať správne štvorce, niektorí sa obišli aj úplne bez rovníc.

Dobrý začiatok je napríklad všimnúť si horný stredný štvorec a štvorec v strede tabuľky. Súčet čísel v nich je rovnaký, a v oboch sú rovnako zarátané čísla z dvoch zelených políčok. Preto (nech by boli „zelené" čísla akékoľvek), musí byť tiež rovnaký súčet 1 + 8 a 10 + „žlté číslo". To je možné len vtedy, ak na tomto mieste bude -1.

1	8
-1	10

Ďalej si môžeme všimnúť stredný ľavý štvorec a štvorec v strede. Opäť majú spoločnú zelenú časť (už s dopísanou -1), a preto aj 6 + 2 = 10 + žlté číslo. To preto musí byť -2.

6		-2
2	-1	10

Do tretice si takto všimneme pravý stredný a pravý dolný štvorce s už doplnenou -2. Z rovnakých dôvodov ako doteraz na žlté políčko musíme doplniť -5.

-2	2
-5	5

Tabuľka tak obsahuje ďalšie tri doplnené čísla. V žltom štvorci (na obrázku vľavo) už ale máme všetky štyri čísla a vidíme, že ich súčet je 10. Teraz už postupne ľahko doplníme na tento súčet aj všetky ostatné štvorce 2x2. Keďže sme pri tomto postupe vždy dopĺňali jediné možné číslo, dostávame preto jediné riešenie úlohy.

	1	8	
6		-2	2
2	-1	10	
	6	-5	5

0	1	8	2
6	3	-2	2
2	-1	10	0
3	6	-5	5

***Príklad č. 2** (opravoval Kubo Kaloč)*

Viacerí ste prišli na to, že pri tejto úlohe je lepšie začať odzadu – to znamená začať s plným jazierkom a zisťovať ako sa mohlo naplniť. Začnime uvažovať zatiaľ bez konkrétnych čísel. Pokiaľ je v jazierku párny počet bunko-saurov, tak mohli vzniknúť rozmnožením sa z polovičného počtu bunko-saurov, alebo tak, že sme do jazierka dvoch pridali. Pokiaľ by sme predtým pridali len jedného alebo troch, tak by to znamenalo, že pred pridaním bol v jazierku nepárny počet bunko-saurov a ten nemal ako vzniknúť rozmnožením sa. Pokiaľ je v jazierku nepárny počet bunko-saurov, tak nemohli vzniknúť rozmnožením sa, ale len pridaním jedného alebo troch, čo zaručí, že pred pridaním ich znova bol párny počet.

Začnime s jazierkom, ktoré má kapacitu 96 bunko-saurov. Postup aký je tu opisovaný je zakreslený na obrázku nižšie, keďže s kreslením sa to dá oveľa ľahšie predstaviť a nestratiť sa. Jazierko v ktorom je 96 bunko-saurov mohlo vzniknúť tak, že sme do neho pridali dvoch bunko-saurov a teda predtým ich bolo 94 alebo sa na poludnie rozmnožili z 48 bunko-saurov.

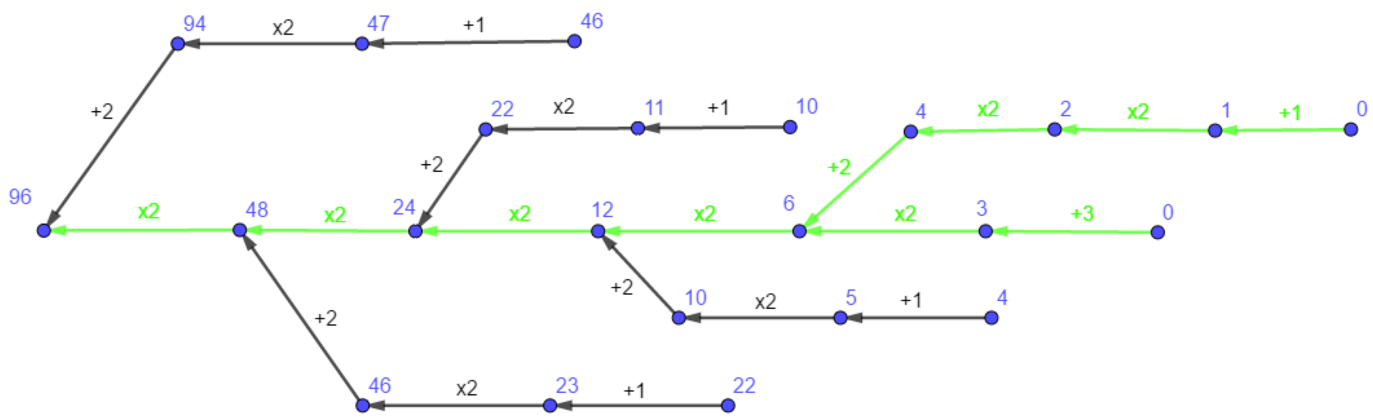
V ďalšom kroku máme 94 bunko-saurov, ktorí nemohli vzniknúť pridaním dvoch (lebo dvoch z troch bunko-saurov sme už použili), takže museli vzniknúť rozmnožením sa z 47. Týchto 47 mohlo vzniknúť len pridaním jedného bunko-saura, ale tým sme minuli všetkých bunko-saurov, ktoré sme mali a zasekli sme sa na 46. Toto teda naše riešenie nebude.

Prejdeme teda na 48 bunko-saurov. Tí podobne mohli vyniknúť pridaním dvoch. Sledovaním tejto možnosti tiež dospejeme k tomu, že sme sa zasekli na 22. To znamená, že 48 bunko-saurov mohlo vzniknúť iba rozmnožením sa z 24 bunko-saurov. Rovnakým uvažovaním zistíme, že 24 bunko-saurov mohlo vzniknúť len rozmnožením sa z 12 a tí zase rozmnožením sa z šiestich.

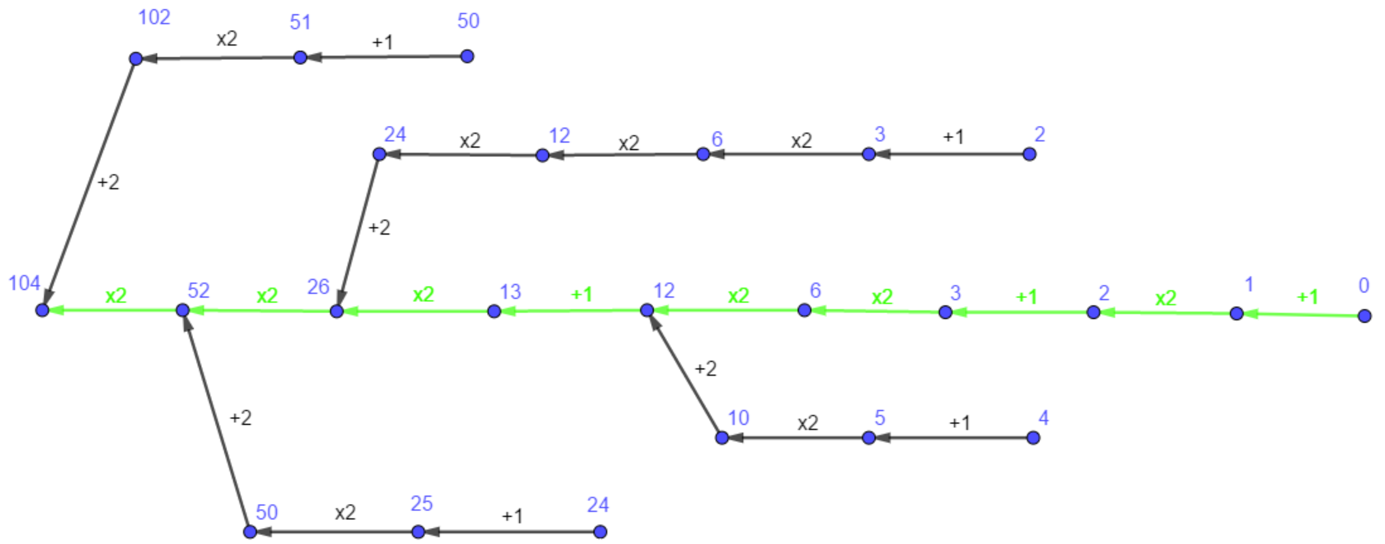
Šesť bunko-saurov mohlo vzniknúť pridaním dvoch alebo rozmnožením. Pokiaľ sa títo šiesti rozmnožili, tak predtým boli v jazierku traja bunko-sauri. Všimnime si, že v tejto vetve riešenia sme zatiaľ nepotrebovali pridať žiadne bunko-saure a teda ak títo traja vznikli pridaním troch, tak máme jedno riešenie.

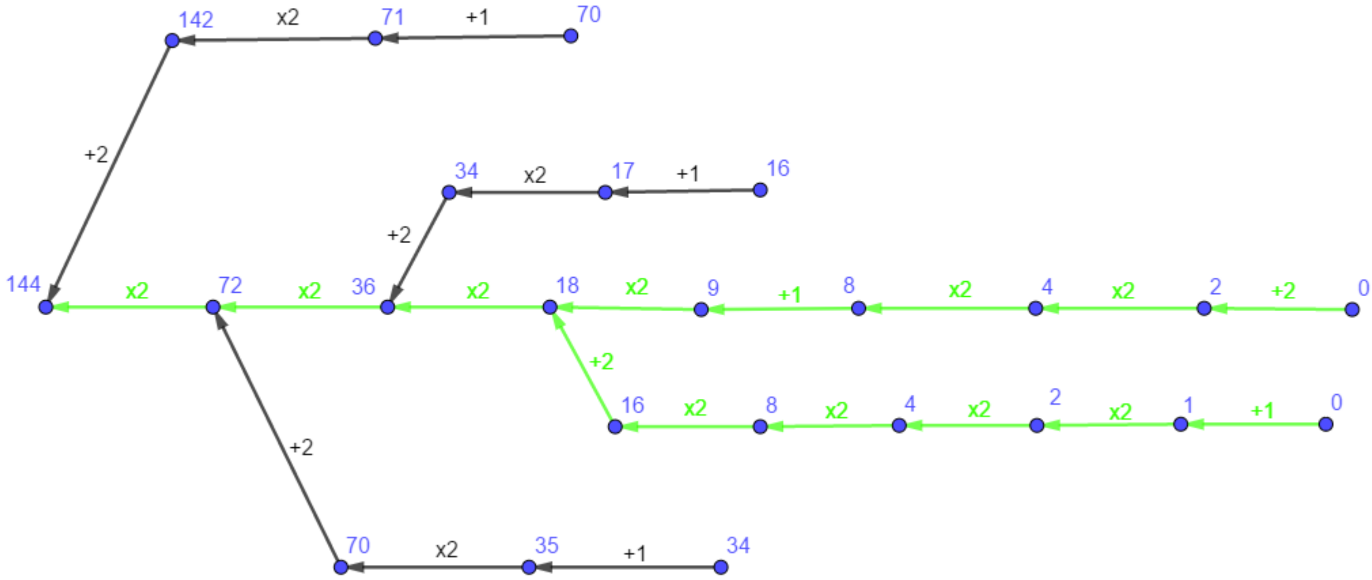
Druhá možnosť je, že šiesti bunko-sauri vznikli pridaním dvoch a teda predtým boli v jazierku štyria. Títo štyria mohli vzniknúť už len rozmnožením sa z dvoch (lebo už nám ostal len jeden nepoužitý bunko-saurus) a tí zase rozmnožením sa z jedného. Ten jeden tam bol teda pridaný na začiatku a máme ďalšie riešenie.

Ako si môžeme byť istí, či sme našli všetky riešenia? V tomto postupe sme zvažovali všetky možnosti ako mohol daný počet bunko-saurov vzniknúť a postupne sme zamietali možnosti, ktoré nastať nemohli. To nás na konci nechalo len so správnymi riešeniami, ktoré sú určite všetky.



Rovnakým postupom sme potom mohli riešiť aj zvyšné dve jazierka. Obrázky, ktoré dopodrobna zachytávajú celý postup pre druhé a tretie jazierko sú nižšie.





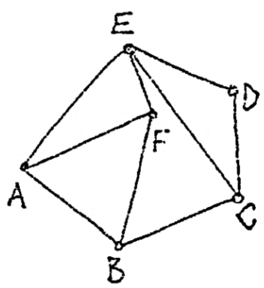
Na konci sme teda dostali pre jazierko s kapacitou 96 dve riešenia. Buď prvý deň pridáme všetkých troch bunko-saurov, alebo prvý deň pridáme jedného bunko-saura a o dva dni neskôr pridáme zvyšných dvoch.

Pre jazierko s kapacitou 104 máme jedno riešenie. Prvý deň pridáme jedného bunko-saura, o deň pridáme ďalšieho, a potom počkáme ďalšie dva dni a pridáme posledného.

Pre jazierko s kapacitou 144 máme dve riešenia. Buď prvý deň pridáme dvoch bunko-saurov a o dva dni pridáme tretieho, alebo prvý deň sme pridáme jedného bunko-saura a o štyri dni pridáme zvyšných dvoch.

Príklad č. 3 (*opravovala Ajka Kuchariková*)

Našou úlohou je zistiť veľkosť uhla FEC, ak vieme že ABCDE je pravidelný päťuholník a ABF je rovnostranný trojuholník. Máme dve možnosti, buď si to veľmi presne narysovať, alebo nejako vypočítať. Pri rysovaní je problém, že aj malá nepresnosť nám môže pokaziť výsledok (už narysovať presne pravidelný päťuholník je dosť ťažké). Preto to skúsme radšej vypočítať.



Chceme zistiť veľkosť uhla FEC. Túto veľkosť vieme vyjadriť pomocou ďalších uhlov z obrázku ako |∠FEC| = |∠AED| – |∠CED| – |∠AEF|. Pokúsime sa zistiť veľkosti troch uhlov na ľavej strane rovnice.

Začnime uhlom AED. Tento uhol je vnútorný uhol pravidelného päťuholníka. Ten si môžete skúsiť sami vypočítať, odvodiť pomocou vzorca, alebo nájsť na internete (prípadne v matematickej knihe). Jednou z týchto metód zistíte, že vnútorný uhol pravidelného päťuholníka je 108°, takže |∠AED| = 75°.

Teraz sa pozrime na uhol CED. Keďže úsečky CD a DE sú dve strany pravidelného päťuholníka, tak musia byť rovnako dlhé. Z toho vyplýva, že trojuholník CDE je rovnoramenný (so základňou CE). To znamená, že uhly pri základni majú rovnakú veľkosť, a teda |∠CED| = |∠ECD|. Navyše vieme, že uhol EDC je vnútorným uhlom pravidelného trojuholníka, takže |∠EDC| = 108°. Súčet uhlov v trojuholníku je vždy 180°, preto |∠CED| + |∠ECD| + |∠EDC| = 180°. Doplnením informácií, ktoré o týchto uhloch vieme dostaneme |∠CED| + |∠CED| + 108° = 180°. Z tejto rovnice ľahko dopočítame |∠CED| = 36°.

Nakoniec nás čaká uhol AEF. Aj v tomto prípade využijeme rovnoramenný trojuholník. Zo zadania vieme, že trojuholník BAF je rovnostranný. To znamená, že úsečka AF je rovnako dlhá ako úsečka AB, ktorá je strana pravidelného päťuholníka ABCDE. Aj úsečka AE je stranou tohto pravidelného päťuholníka, takže |AE|=|AB|=|AF|. Z toho vyplýva, že AEF je rovnoramenný trojuholník so základňou EF, a preto |∠AEF| = |∠AFE|. Všimnime si, že veľkosť uhla FAE môžeme vypočítať ako veľkosť uhla BAE mínus veľkosť uhla BAF. Veľkosť uhla BAE je 108° (opäť sa jedná o vnútorný uhol pravidelného päťuholníka), zatiaľ čo veľkosť uhla BAF je 60° (všetky uhly v rovnostrannom trojuholníku majú veľkosť 60°). Takže |∠FAE| = 108° – 60° = 48°. Súčet uhlov v trojuholníku AEF (podobne ako v každom trojuholníku) je 180°, takže |∠AEF| + |∠AFE| + |∠FAE| = |∠AEF| + |∠AEF| + 48° = 180°, a teda |∠AEF| = 66°.

Teraz už ľahko dopočítame **|∠FEC|** = |∠AED| – |∠CED| – |∠AEF| = 108° – 36°– 66° **= 6°**.

***Príklad č. 4** (opravovala Kika Kovalčíková a Ondro Belan)*

Tí, ktorí si naozaj hádzali kockami, prišli na dve veci. Prvá je, že čísla 4 a 12 padajú približne rovnako často. Mohlo sa stať, že jedno z čísel padlo 8 krát a druhé 12 krát, ale nikdy sa nestalo, že by jedno z nich padlo napríklad štyri krát častejšie než to druhé. Druhá vec bola, že najčastejší súčet na stene bol niekde medzi 7 a 10. Každému vyšlo niečo trochu iné, čo je pri hádzaní kockami úplne normálne.

Pozrime sa na to, koľkými rôznymi spôsobmi vieme získať súčet 4:

Prvý hod:	~~1~~	~~1~~	2	~~2~~	~~1~~	3	~~2~~	3	~~3~~
Druhý hod:	1	2	~~1~~	2	3	~~1~~	3	~~2~~	3
Tretí hod:	3	2	2	2	1	1	1	1	1
Súčet:	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Prečiarknuté čísla sú tie, ktoré sme vyškrtli z piesku po druhom hode. Spolu je to deväť možností. Teraz si podobným spôsobom vypíšme, ako všelijako by sme sa mohli dostať ku súčtu 12:

Prvý hod:	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	6	6	6	6	6
Druhý hod:	6	6	6	6	6	6	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~
Tretí hod:	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
Súčet:	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

Pre súčet 12 je to spolu jedenásť možností. Preto je pravdepodobnejšie, že častejšie bude padať súčet 12 v porovnaní so súčtom 4.

Ktoré číslo bude na stene najčastejšie? Môžeme si podobným spôsobom vypísať všetky možnosti pre ostatné súčty. Pre súčet 7 dostaneme 36 možností, čo je viac ako pre hociktorý iný súčet. Môžeme sa na to pozrieť aj takto: Ak by nám po dvoch hodoch zostalo na piesku akékoľvek číslo, vždy vieme tretím hodom hodiť také číslo, aby bol výsledný súčet 7. Napríklad ak zostane po druhom hode v piesku číslo jeden, vieme v treťom hode hodiť číslo šesť, aby bol výsledný súčet 7. Toto ale neplatí pre väčšie súčty. Ak je po druhom hode číslo v piesku jeden, už nebudem vedieť nijako získať výsledný súčet 8. Podobne, ani menšie čísla neviem získať, ak mi po prvom hode zostane v piesku číslo šesť.

Najčastejšie očakávané číslo na stene je teda 7 – čo ale neznamená, že vždy aj bude najčastejšie. Aj iné súčty mali porovnateľne veľa možností, ako sa k nim vieme dostať. Preto nie je vylúčené, že na stene jaskyne bolo najčastejšie napríklad číslo 8.