

SEZAMKO 2019/2020, Vzorové riešenia 1. série letnej časti

Milí riešitelia,

opäť nám prišla kopa zaujímavých riešení. Ariadnu a Tézua vaša pomoc veľmi potešila. Netreba však nič nechať na náhodu a treba naďalej trénovať svoje matematické svaly. K tomu vám isto dopomôžu tieto vzorové riešenia, hlavne ak si ich poriadne prečítate.

Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii. Nezabudnite, že všetko o SEZAMKOVI nájdete aj na stránke www.sezam.sk

Veľa úspechov v druhej sérii vám želajú organizátori SEZAMKA.

Do súťaže SEZAMKO sa dá stále zapojiť aj od druhej série. Máš kamaráta alebo spolužiaka, ktorému sa páči matematika? V obálke máš zadania druhej série dvojmo práve preto, aby si mu jedny mohol dať. Opravovatelia druhej série sa veľmi potešia, ak budú môcť opraviť viac riešení. (Nezabudni, že SEZAMko je určený pre 5. a 6. ročník ZŠ a triedu 1G na osemročných gymnáziách.)

Príklad č. 1 (opravovala Kika Kovalčíková)

Našou úlohou bolo zistiť, aké všelijaké rozdiely môžeme získať pri odčítaní dvoch päťciferných čísel MAJAK – MAKAJ. Prvé dve číslice, na mieste tisícov a desaťtisícov, sú v oboch číslach rovnaké. Tieto dve číslice sa pri odčítavaní navzájom zrušia, a zostane po nich len nula. Preto stačí, ak budeme skúmať odčítanie čísel JAK – KAJ.

Výsledok odčítania JAK – KAJ môže byť dvoj- alebo trojciferný. Ak chceme, aby bol násobkom čísla 101, musia to byť čísla ako napríklad 202, alebo 707, alebo 909. V strede musí byť nula. Toto vyzerá na prvý pohľad dobre, v strede čísel JAK a KAJ je rovnaká číslica A (napríklad 5), ktorá po odčítaní dvoch slov JAK – KAJ nechá po sebe nulu na mieste desiatok ($5 - 5 = 0$).

Ak má byť výsledok rozdielu JAK – KAJ kladný, tak číslica J musí byť väčšia než K, napríklad $J = 9$ a $K = 8$. Poďme ich teda odčítať. Začneme od konca, najprv počítame koľko je $K - J$ ($8 - 9$). Toto odčítanie bude s prechodom cez desiatku, lebo odčítavam väčšie číslo od menšieho. Preto, keď budem odčítavať čísla na mieste desiatok, už nebudem počítať koľko je $A - A$, teda $5 - 5$, ale $5 - 6$, lebo v predošlom odčítaní sme prechádzali cez desiatky. Na druhom mieste výsledku teda nebude číslica 0, ale číslica 9. My už vieme, že ak má byť trojciferné číslo deliteľné 101, musí mať na mieste desiatok číslicu 0. Preto tento príklad nemá žiadne riešenie.

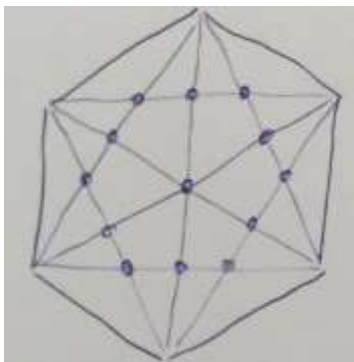
Neexistujú žiadne také číslice, ktoré by sme mohli dosadiť na mieste písmen M, A, K, A, J, aby bol výsledok MAJAK – MAKAJ deliteľný číslom 101.

Poznámka k riešeniu:

Niektorí z vás experimentovali aj so záporným výsledkom, teda čo ak by bolo J menšie než K. Veľmi ste ma potešili svojou odvahou, že aj keď záporné čísla ešte celkom nepoznáte, vrhli ste sa na ne a skúmali ste všelijaké možnosti ☺. Skúste sa doma chvíľu pohrať s kalkulačkou, a dávajte do nej postupne príklady ako $12 - 10$, a hneď potom $10 - 12$. Odčítajte najprv menšie číslo od väčšieho, a hneď potom tie isté čísla, ale v opačnom poradí. Za chvíľu si všimnete, ako takéto odčítanie funguje.

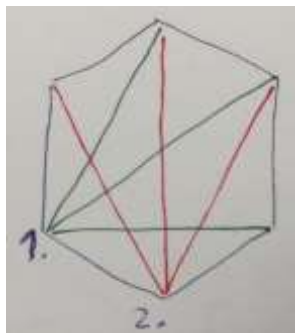
Príklad č. 2 (opravoval Hynek Bachratý)

Našou úlohou bolo nakresliť rôznymi farbami uhlopriečky šesťuholníka tak, aby sa pretínali vždy len uhlopriečky rôznych farieb. Zároveň chceme, aby nám na to stačilo čo najmenej farieb. Na obrázku nižšie si len overíme, že uhlopriečok je spolu 9. (Zo šiestich vrcholov vychádzajú po tri uhlopriečky, každá ma ale dva konce, preto ich je $(6 \cdot 3) : 2 = 9$.) Ešte dôležitejšie je presne si uvedomiť, že sa spolu *pretínajú* v 13 vnútorných bodoch šesťuholníka. (Vo vrcholoch šesťuholníka sa uhlopriečky *dotýkajú*. Niektorí z vás aj tieto dotyky považovali za pretnutia a riešili tak trochu iný a trochu ľahší príklad. Ak z vášho riešenia bolo jasné, že došlo k tejto zámene, uznali sme ho za takmer správne.)

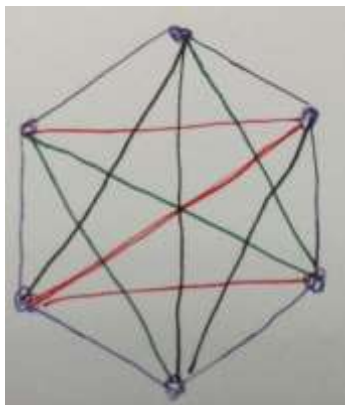


Z 13 priesečníkov je dôležitý ten prostredný, kde sa pretínajú 3 najdlhšie uhlopriečky. Z toho je jasné, že musíme použiť *aspoň* 3 rôzne farby. Otázka je, či nám budú stačiť, alebo treba pridať ešte ďalšie.

Veľa z vás si myslelo, že treba ešte jednu farbu, teda celkovo 4. Pri kreslení uhlopriečok ste pritom vychádzali z toho, že z (prvého) vrcholu môžeme na začiatku nakresliť 3 uhlopriečky jednou farbou, ktoré sa nepretínajú. Keď ale pokračujete ďalej týmto spôsobom, nakoniec je potrebné pridať ešte štvrtú farbu.



Dalo sa ale začať aj inak. Existuje aj druhý spôsob, ako s prvou farbou nakresliť 3 uhlopriečky. Musia mať ale tvar písmena „N“. Pokiaľ ste ďalej pokračovali týmto spôsobom, podarilo sa vám uhlopriečky nakresliť len pomocou 3 farieb. A pokiaľ ste si uvedomili a napísali, že menej nám kvôli strednému priesečníku určite nestačí, máte úplnú istotu, že ste našli správnu odpoveď.



Na zafarbenie uhlopriečok šesťuholníka stačia 4 farby.

Príklad č. 3 (opravovala Denisa Múthová)

Našou úlohou je nájsť všetky dvojice čísel na truhlici, ktorých súčin je 1 000 000 a neobsahujú cifru 0. Zo zadania vieme, že na truhlici je dvojriadkový kódový kotúč.

Pozrime sa na súčin milión. Ako si ho vieme rozdeliť na menšie časti? Napríklad $2 \cdot 500\,000$ je milión, alebo $4 \cdot 250\,000$ je milión. Aby sme zistili, ako všelijako si vieme milión rozdeliť, pozrime sa na jeho prvočísla. Milión si vieme rozdeliť na nasledujúce prvočísla $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, dokopy máme šesť 2 a šesť 5.

Keď vynásobíme $5 \cdot 2$ dostaneme na konci súčinu nulu. Keď $5 \cdot 2 \cdot 2$ dostaneme na konci tiež nulu. Keď vynásobíme $5 \cdot 5 \cdot 2$ dostaneme na konci tiež nulu. Teda vždy, keď vynásobíme ľubovoľný počet dvojok a päťok, dostaneme na konci súčinu číslo nula. No to zo zadania nechceme. Tým pádom dvojky a päťky nemôžu byť v tej istej dvojici.

Preto budú samostatne v dvoch číslach. Po vynásobení dostaneme $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ čo nám dá 64. A $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ je v súčine 15 625. Našli sme jednu dvojicu čísel, ktorá sedí zadaniu. Je aj *jediná*, pretože inak si prvočísla nevieme vynásobiť do dvojice čísel tak, aby sme ani v jednom z nich nemali na konci nulu.

Jediná dvojica takých čísel, ktoré neobsahujú nulu a v súčine dajú milión, je dvojica 64 a 15 625.



Príklad č. 4 (opravovali Štefka Glevitzká a Verda Veselá)

Ukážeme si spôsob, ako nájsť odpoveď v obrázku. Samozrejme, spôsobov existuje omnoho viac. Jedným z nich je tiež také, že si označíme dĺžky strán písmenkami a riešime rovnice. (Takéto riešenie si tu ale neuvedieme.)

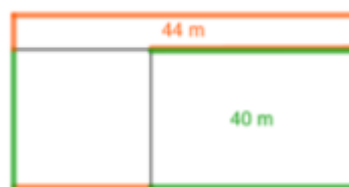
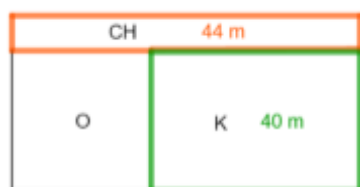
Byt a jeho miestnosti sú obdĺžniky a tie pozostávajú z 2 párov rovnako dlhých strán. Vieme, že obvod bytu je 60 m, preto súčet dĺžok jeho dvoch (rôznych) strán je 30 m (na obrázku hore modré). Podobne, obvod chodby je 44 m, preto dve jeho rôzne steny sú spolu dlhé 22 m (na obrázku hore oranžové).

Tieto dve oranžové steny chodby sú zároveň časťou obvodu celého bytu. Na obrázku pekne vidno, že Rozdiel dĺžok modrých a oranžových čiar je dĺžka zelenej čiary. Tá predstavuje dĺžku jednej strany kuchyne, no tiež dĺžky strán obývačky (obývačka má tvar štvorca). Preto strana obývačky meria $30\text{ m} - 22\text{ m} = 8\text{ m}$.

Strana obývačky je dlhá 8 metrov, jej obvod je preto 32 m a obsah 64 m².

Poznámka k riešeniu:

Všimnite si, že obvod kuchyne sme v riešení vôbec nepotrebovali.



Trochu iné riešenie:

Znova budeme pracovať s jednotlivými dĺžkami strán izieb, no tentokrát ich budeme prenášať. Využijeme práve to, že protilahlé strany obdĺžnikov sú rovnako dlhé. Teda spoločná strana medzi chodbou a obývačkou je taká dlhá ako strana obývačky na obvode bytu (oranžová, pozri obrázok vpravo dole). Tak isto strana medzi kuchyňou a obývačkou je taká dlhá ako strana obývačky na obvode bytu (zelená, pozri obrázok vpravo dole).

Dostali sme, že súčet obvodu chodby a kuchyne je rovný súčtu obvodu bytu s dvojnásobkom dĺžky strany medzi chodbou a kuchyňou (oranžovo-zelená na obrázkoch).

Teda $44\text{ m} + 40\text{ m} = 60\text{ m} + 2 \cdot (\text{dĺžka oranžovo-zelenej strany})$. Z toho vieme dopočítať, že dĺžka strany medzi chodbou a kuchyňou je 12 m. Obvod kuchyne je 40 m, preto druhá strana kuchyne je dlhá 8 m. To je tiež dĺžka strany obývačky, znovu sme teda zistili, že obývačka má strany dlhé 8 m.