SEZAM, školský rok 2019/20, vzorové riešenia 3. letnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou končí aj celá letná časť SEZAMu. Lucy, Anke, Gallo a Pierre vám z dávneho praveku všetkým ďakujú za celoročnú pomoc pri riešení ich problémov a prajú pekné a pohodové leto. Tých najšikovnejších z vás navyše čaká letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 31. júla až 9. augusta na Hutách. Pred tým, než sa pustíte do vypĺňania návratky, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia.
Pozorne sledujte stránku www.sezam.sk, kde budeme informovať o všetkom dôležitom ohľadom súťaže a tábora.

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (opravoval Marián Kurčina)

Máme dve podmienky, ktoré musia Pierre a Anke zachovať:

P1 – Aspoň 4 misky s rovnakým ovocím musia zostať zatvorené.
P2 – Aspoň 3 misky s iným ovocím musia zostať zatvorené.

Máme nájsť najväčší počet misiek, ktoré môžu otvoriť bez toho aby boli porušené podmienky. Vieme, že ak pri tomto počte otvoria ďalšiu misku, tak aspoň v jednej situácii nebudú obidve podmienky splnené. Preto budeme hľadať najväčší možný počet zatvorených misiek, pri ktorom nebudú platiť obe podmienky naraz. Ak tento počet nájdeme, tak po pridaní ešte jedného zatvoreného pohára budú podmienky vždy platiť.

Ak bude platiť P1 a P2 nie, tak z jedného ovocia budeme mať aspoň 4 misky a z ďalších ovocí budeme mať menej ako 3 misky. Pri najvyššom možnom počte zatvorených misiek s nesplnenými podmienkami budeme mať z dvoch ovocí po 2 misky a z jedného ovocia aspoň 4 misky. Z posledného ovocia dokážeme mať maximálne 8 misiek, ak to budú slivkové kompóty. Teda budeme mať 8 slivkových kompótov, 2 višňové a 2 jablkové, čo je spolu 12.

Ak bude platiť P2 a P1 nie, tak z každého ovocia môžeme mať najviac 3 misky. V opačnom prípade by platilo P1. Keďže máme tri druhy ovocia, tak v tomto prípade môžeme mať najviac $3 \cdot 3 = 9$ misiek. A to je menej ako 12.

Najvyšší možný počet zatvorených misiek, pri ktorom podmienky P1 a P2 nemusia byť splnené je 12. Na poličke teda musia nechať 13 misiek a otvoriť teda môžu $20 - 13 = 7$ misiek.

Kamaráti môžu otvoriť a zjesť sedem misiek ovocia.

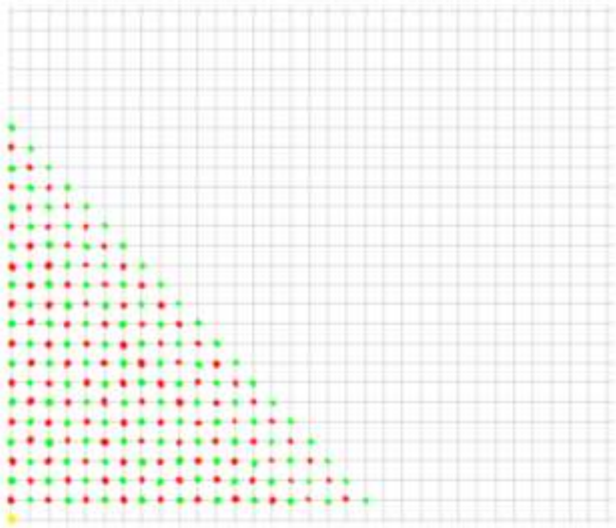
Príklad č. 2 (opravovali Matúš Hladký a Jožo Rajník)

Chceme zistiť, na koľkých bodoch štvorcovej siete môže tanečník skončiť, ak urobí presne 20 polmetrových skokov. Dobrý začiatok je zistiť, kam až sa vie najďalej dostať. Keď sa chce dostať najďalej, tak sa nemôže vracať. To znamená, že ak raz skočí napríklad na sever, tak potom nemôže ísť na juh, lebo by sa vracal. Tak isto to platí aj naopak (keď skočí na juh, tak nemôže skočiť zase na sever). A rovnako to funguje aj pre východ a západ. Takže postupne skáčeme napríklad 20S, 19S + 1V, 18S + 2V, …, 1S + 19V, 20V, 19V + 1J, …, 1V + 19J, 20J, 19J + 1Z, …, 1J + 19Z, 20Z, 19Z + 1S, …, 1Z + 19S. (Zápis 1S + 19V znamená, že spravíme 1 krok severne a 19 krokov východne.) Keď si zaznačíme všetky tieto body, tak nám vyjde štvorec otočený o 45°. Za tento štvorec sa určite nedostane, lebo je to príliš ďaleko.

Vie ale tanečník skončiť na všetkých mrežových bodoch vnútri štvorca? Keď si vyskúšame dostať sa do niektorých bodov (napríklad tých štyroch, ktoré sú vzdialené 0,5 metra od kruhu kde tanečník začína) tak zistíme, že sa nám to nepodarí. Ku každému bodu sa vieme dostať nejakou najkratšou cestou na najviac 20 skokov. V takejto ceste skáče tanečník buď iba na sever alebo iba na juh. Keď je v ceste skok na obidve tieto strany, tak ak obidva vymažeme, tak skončí na rovnakom bode a cesta je kratšia.

K niektorým bodom má najkratšia cesta párny počet skokov (napríklad 2S + 4V) a k niektorým nepárny (napríklad 2S+3V). Na tých bodoch, na ktoré vie doskákať na párny počet skokov, vie aj skončiť. Keď sa tam už dostane, tak môže potom napríklad skákať S, J, S, J …, až kým neurobí 20 skokov. Keď to isté ale vyskúšame urobiť na bodoch, na ktoré sa dostane nepárnym počtom skokov, tak skončí vždy o jeden bod severne. Nemôže existovať nejaký iný spôsob, ako by sa tam mohol dostať. Každá cesta na takýto bod musí obsahovať všetky skoky, ktoré obsahuje najkratšia cesta na tento bod. Je však jedno v akom poradí. Týchto skokov je nepárny počet. Cesta musí mať ale presne 20 skokov, preto musí urobiť ešte nejaké navyše. Na to aby skončil na rovnakom bode, tak musíme pridať dva skoky, S + J alebo V + Z. Inak by neskončil na rovnakom bode. Preto počet skokov navyše bude vždy párny. Súčet nepárneho a párneho čísla je ale vždy nepárne číslo. Preto nevie skončiť na bodoch, ku ktorým má najkratšia cesta nepárny počet skokov.

Teraz poďme tie body spočítať. Keďže je to štvorec, tak si ho môžeme rozdeliť na takéto 4 časti, ktoré spolu so stredným bodom tvoria celý štvorec, v ktorom skáče. Rozmyslite si to!



Žltý bod je kruh v strede. Červené sú body, kde nevie skončiť. A zelené, kde vie skončiť. Keď spočítame zelené body po stĺpcoch, tak ich je 10 + 10 + 9 + 9 + 8 + 8 + 7 + 7 + 6 + 6 + 5 + 5 + 4 + + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 110. To musíme ešte vynásobiť 4, lebo celý štvorec má 4 také časti a pripočítať stredný bod (kruh), lebo tam vie určite tiež skončiť, ak by sa každý ťah vrátil. To je dohromady 110 · 4 + 1 = 441 bodov, na ktorých môže po presne 20 skokoch tanečník skončiť.

Tanečník sa vie dostať do 441 mrežových bodov.

Iné riešenie:
Existuje aj iné spôsoby, ktorými sa dali niektoré časti riešenia zjednodušiť. Vysvetliť, prečo sa tanečník nemôže dostať na červené body môžeme aj nasledovne. Ofarbime si body na striedačku (tak ako na obrázku) a žltý bod v strede bude tiež zelený. Ak je tanečník v červenom bode, tak vie skočiť len do zeleného. Ak je v zelenom tak len do červeného. Preto sa bude striedať zelený a červený bod pri jeho skákaní. Po prvom skoku bude v červenom bode, po druhov v zelenou po treťom v červenom, atď. Keďže sa to strieda, tak po dvadsiatom skoku bude isto v zelenom bode.
Spočítanie zelených bodov si vieme uľahčiť. Stačí nám si všimnúť, že všetky zelené body sú usporiadané do štvorca zo stranou 21 zelených bodov, takže zelených bodov je 21 · 21 = 441.

Príklad č. 3 (opravoval Peťo Novotný)

Uvedieme dve riešenia – jedno s vypísaním všetkých možností, druhé s využitím šikovnej úvahy.

1. riešenie

Možno sa to na prvý pohľad nezdá, ale celkový počet možností výberu piatich kariet zo siedmich nie je až taký veľký (ako sa ukáže, je ich 21). Preto dobrá stratégia je vypísať všetky možné pätice a pozrieť sa na ich súčiny a súčty. Pätice rovno roztriedime do dvoch skupín podľa toho, či súčet ich čísel je párny, alebo nepárny. Toto rozdelenie zároveň pomôže pri vypisovaní všetkých možností, keďže pri systematickom vypisovaní ľahko skontrolujeme, že žiadna možnosť nechýba.

Medzi uvedenými siedmimi číslami sú štyri párne (2, 4, 6 a 8) a tri nepárne (3, 5 a 7). Ak z nich vyberieme päť čísel, budú medzi nimi jedno, dve alebo tri nepárne. Ak symbolicky párne čísla reprezentujeme písmenkom *P* a nepárne písmenkom *N*, dajú sa pätice roztriediť do troch skupín:

(A) (*N*, *P*, *P*, *P*, *P*) (B) (*N*, *N*, *P*, *P*, *P*) (C) (*N*, *N*, *N*, *P*, *P*)

Skupina (A) obsahuje 3 pätice – v každej je štvorica párnych čísel (2, 4, 6, 8) skombinovaná s jedným z troch nepárnych čísel.

V skupine (B) vypíšeme všetky pätice tak, že každú možnú dvojicu nepárnych čísel (3, 5), (3, 7) a (5, 7) skombinujeme s každou možnou trojicou párnych čísel (2, 4, 6), (2, 4, 8), (2, 6, 8) a (4, 6, 8). Dostaneme tak $3 \cdot 4 = 12$ rôznych pätíc.

Pätice v skupine (C) dostaneme tak, že k trojici nepárnych čísel (3, 5, 7) postupne pridávame všetky možné dvojice párnych čísel (2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 6), (4, 8), (6, 8) – dostaneme tak 6 pätíc.

Súčet dvoch párnych či dvoch nepárnych čísel je párny a súčet párneho a nepárneho čísla je nepárny. Z toho možno ľahko nahliadnuť, že súčet čísel v každej pätici v skupinách (A) a (C) je nepárny, zatiaľ čo v skupine (B) je párny. Dostávame tak nasledovný zoznam doplnený za šípkou o súčin prvkov pätice (samotný súčet už ani nepíšeme, dôležitá v tejto úlohe je len jeho parita):

nepárny súčet (skupiny (A) a (C))	párny súčet (skupina (B))
(3, 2, 4, 6, 8) → 1152	(3, 5, 2, 4, 6) → 720
(5, 2, 4, 6, 8) → 1920	(3, 5, 2, 4, 8) → 960
(7, 2, 4, 6, 8) → 2688	(3, 5, 2, 6, 8) → 1440
(3, 5, 7, 2, 4) → 840	(3, 5, 4, 6, 8) → 2880
(3, 5, 7, 2, 6) → 1260	(3, 7, 2, 4, 6) → 1008
(3, 5, 7, 2, 8) → 1680	(3, 7, 2, 4, 8) → 1344
(3, 5, 7, 4, 6) → 2520	(3, 7, 2, 6, 8) → 2016
(3, 5, 7, 4, 8) → 3360	(3, 7, 4, 6, 8) → 4032
(3, 5, 7, 6, 8) → 5040	(5, 7, 2, 4, 6) → 1680
	(5, 7, 2, 4, 8) → 2240
	(5, 7, 2, 6, 8) → 3360
	(5, 7, 4, 6, 8) → 6720

Vidíme, že dve čísla (1680 a 3360) sa v zozname opakujú, pričom každý výskyt je v inom stĺpci. To znamená, že ak Gallo povedal Lucy súčin 1680 alebo 3360, tá nemá šancu rozhodnúť, či je súčet párny, alebo nepárny – nevie, ktorú z dvoch pätíc s takým súčinom Gallo vybral. Naopak, ak Gallo povedal Lucy hocijaké iné číslo, Lucy vie povedať, či je súčet čísel na kartách párny, alebo nepárny: stačí vyhľadať súčin v tabuľke uvedenej vyššie a pozrieť sa, či je v pravom alebo ľavom stĺpci.

<u>2. riešenie</u>

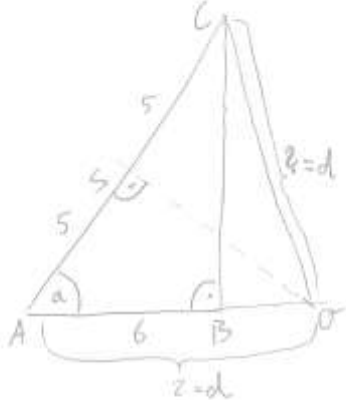
Pri vypisovaní všetkých možností si možno uvedomiť jednu vec – každá pätica je jednoznačne určená dvojicou zvyšných (nevybraných) kariet. Toto môžeme posunúť ešte ďalej: Ak poznáme súčin čísel na piatich vybraných kartách, vieme z neho určiť aj súčin na dvoch nevybraných kartách – stačí súčin všetkých 7 kariet $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$ vydeliť súčinom, ktorý oznámil Gallo. Ak sa tento výsledok dá rozložiť na súčin dvoch rôznych čísel z množiny $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ jediným spôsobom, vie Lucy jednoznačne povedať, ktoré dve karty chýbajú, a teda aj to, ktorých päť kariet je vybraných a aký je ich súčet.

Nájsť „problémové" dvojice s rovnakým súčinom je celkom ľahké: Môžeme vyskúšať všetkých 21 možností. Urýchliť to vieme tak, že nemusíme skúšať dvojice obsahujúce číslo 5 – ak totiž napr. v jednej dvojici je číslo 5 a v druhej nie je, ich súčiny nemôžu byť rovnaké (len jeden z nich je deliteľný piatimi). To isté platí pre číslo 7. Ostane tak na porovnanie už len 10 súčinov, medzi ktorými rovnaké výsledky dávajú iba $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 12$ a $4 \cdot 6 = 3 \cdot 8 = 24$.

Súčet vybraných piatich čísel vieme dostať odpočítaním dvoch nevybraných čísel od celkového súčtu 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35. Ak teda Lucy zistí, že súčin nevybraných čísel je 12, nebude vedieť rozhodnúť o tom, či je súčet vybraných čísel párny, alebo nepárny, pretože 35 – 2 – 6 = 27 je nepárne, zatiaľ čo 35 – 3 – 4 = 28 je párne číslo. Rovnaký problém nastane pri súčine 24, pretože 35 – 4 – 6 = 25 je nepárne a 35 – 3 – 8 = 24 párne číslo. Vo všetkých ostatných prípadoch Lucy vie povedať, či je súčet párny alebo nepárny, pretože vie určiť jeho presnú hodnotu.

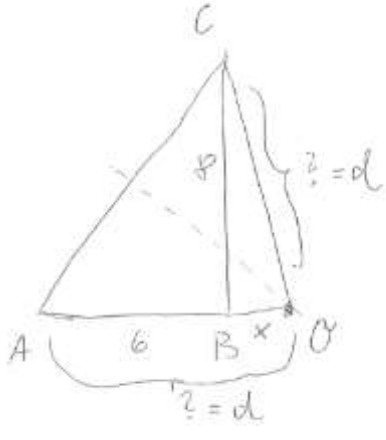
Príklad č. 4 (*opravovali Vierka Glevitzká a Hynek Bachratý*)

Úloha bola pekná a ponúkala veľa spôsobov ako ju vyriešiť. Spoločným východiskom všetkých ale bol prvý postreh, že trojuholník ABC je pravouhlý. Platí totiž, že $6^2 + 8^2 = 10^2$ a Pytagorova veta. Druhým dôležitým bolo pozorovanie, že nový bod O leží na osi úsečky AC, a je preto rovnako vzdialený od A aj od C. Hľadaná dĺžka *d* úsečky OC je preto rovnaká ako dĺžka úsečky AO, s ktorou sa dá lepšie pracovať.



Ďalej už uvedieme len dve z mnohých vašich správnych riešení. Ich prednosťou je, že sú najjednoduchšie a najkratšie, čo tiež patrí k prednostiam matematiky a matematikov. Pri prvom si stačí uvedomiť (a pozrieť na prvom obrázku), že trojuholníky ABC a AOS (S je stred úsečky AC, ktorú delí na 5 dm a 5 dm) sú si podobné. Oba trojuholníky sú pravouhlé a majú aj rovnaký spoločný uhol alfa. Potom musia byť pomery zodpovedajúcich strán rovnaké. Platí teda, že |AB| / |AS| = |AC| / |AO|. (Prvé dve sú kratšie odvesny, druhé dve sú prepony.)

Tri z týchto vzdialeností poznáme a štvrtá je hľadaná dĺžka *d*. Takže platí 6 / 5 = 10 / *d*, z čoho už ľahko dopočítame *d* = 50/6 = 8 + 1/3 = 8,333…



Druhé riešenie ešte raz využije Pytagorovu vetu (a druhý obrázok), tentoraz v trojuholníku BOC. Ak označíme x dĺžku úsečky BO a d hľadanú dĺžku úsečky OC (čiže |OC| = |AO| = 6 + x), platí potom $|BO|^2 + |BC|^2 = |OC|^2$, takže po dosadení máme $x^2 + 8^2 = (6 + x)^2$. Riešenie tejto rovnice je trochu zložitejšie, ale vyjde nám $x = 7/3$ a opäť $d = x + 6 = 8 + 1/3$.

Úsečka OC je dlhá 8,333… decimetrov.

Poznámka opravovateľov:

Poslali ste nám aj veľa ďalších zaujímavých riešení. Niektoré kombinovali tieto dve a používali podobnosť a Pytagorovu vetu pre iné trojuholníky, ďalšie využívali aj vzorce pre plochu pravouhlých trojuholníkov alebo dokonca funkciu kosínus. Správne boli všetky a chválime ich autorov, sem sa nám už ale ďalšie riešenia nezmestia…