JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XV. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 5. a 6. ročník ZŠ a prímu OG

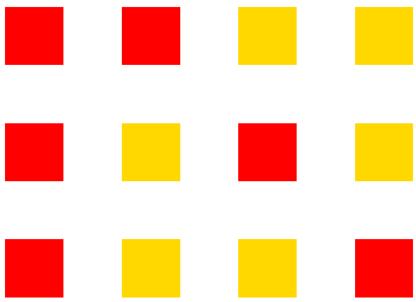
S E Z A M K O, Školský rok 2020/2021, 2. zimná séria
Vzorové riešenia

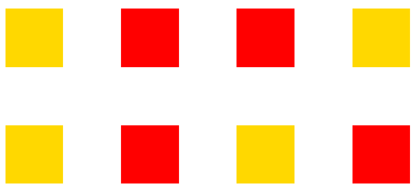
***Úloha č. 1** (opravovali Martin Kaláb a Maťa Kudelčíková)*

Prvé čo si všimneme hneď ako začneme skúšať stavať múriky je, že v strede musí byť vždy žltý kameň. Prečo to však platí? K dispozícií máme päť žltých kameňov a štyri červené, teda dokopy deväť kameňov na ukladanie. Kameň v strede má takú vlastnosť, že nemá párový kameň ktorý by musel byť rovnakej farby na to aby sa dodržala symetrickosť múrika. Keďže to je jediná pozícia kde toto platí, potrebujeme na toto miesto dať takú farbu, ktorej je dokopy nepárny počet kameňov, aby sme túto farbu následne vedeli symetricky uložiť. Keďže žltých je nepárny počet, do stredu musíme položiť žltý kameň.

Následne nám ostanú štyri červené a štyri žlté kamene. Vieme že strana naľavo od stredového kameňa musí byť zrkadlovo otočená od strany napravo. Poradie v týchto stranách bude iné, ale počet farieb bude musieť byť rovnaký. Znamená to teda, že na obidve strany použijeme dva žlté a dva červené kamene. Na skúmanie možností nám teraz stačí hľadať len jednu stranu s týmito štyrmi kameňmi a druhú stranu vždy doložíme tak aby bola zrkadlovo.

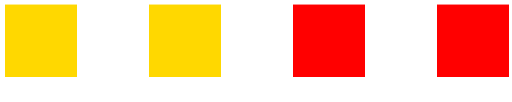
Teraz potrebujeme systematicky nájsť všetky možnosti, akými vieme usporiadať tieto dva červené a dva žlté kamene. Budem ukladať vždy dva červené kamene na rôzne pozície a zvyšné doložím žltými kameňmi. Vieme začať počítať možnosti, kde najľavejší červený kameň je na prvom mieste. Druhý červený kameň potom vieme uložiť na tri miesta, viď obrázok vpravo.





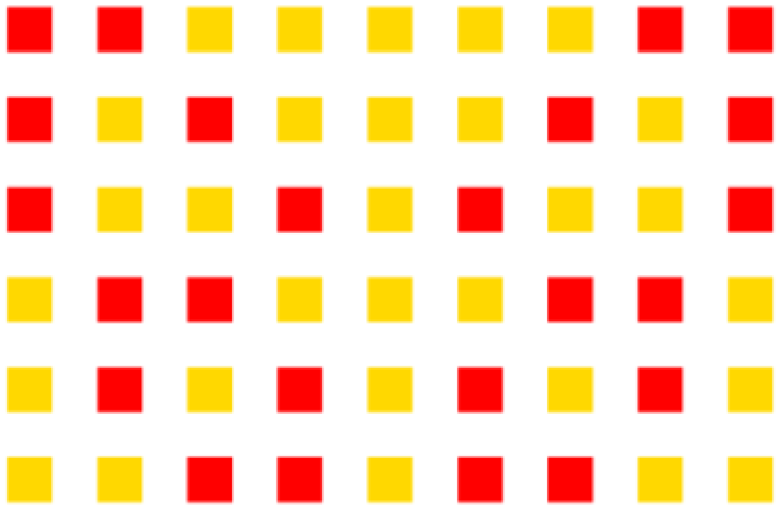
Toto sú všetky možnosti kde je prvý červený kameň naľavo. Čo ak je ale najľavejší červený kameň na druhom mieste zľava? Máme potom dve nové možnosti kam položiť druhý červený kameň.

Ostáva nám možnosť kde je tento kameň na treťom mieste. Na výber s druhým kameňom už moc nemáme, ostáva nám len jedno miesto napravo od tohoto prvého červeného kameňa.

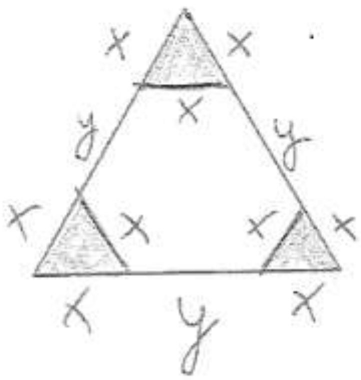


Prvý červený kameň na štvrtom mieste nemôže byť pretože by sme druhý červený kameň už nemali kam položiť. Našli sme teda **6** možností, ako postaviť múrik a máme istotu, že sú sme žiadnu možnosť nevynechali, pretože sme riešenia systematicky prehľadali. Nižšie sú riešenia nakreslené kompletne aj s ich opačnými stranami.

Riešení je teda 6 a sú to tieto:



***Úloha č. 2** (opravoval Hynek Bachratý)*



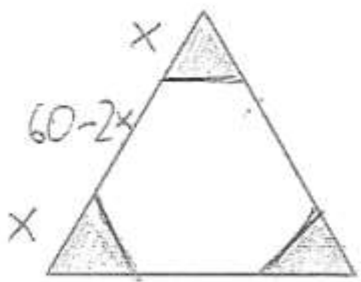
Úlohy ste takmer všetci zvládli veľmi dobre, a riešili ste ju viacerými, aj keď podobnými postupmi.

Na prvom obrázku sme si označili písmenkami dĺžky všetkých zaujímavých úsečiek. Pretože vyčlenené malé trojuholníky sú rovnaké a rovnostranné, všetky ich strany majú rovnakú dĺžku ***x***. Písmenom ***y*** sme si označili zvyšok strán veľkého trojuholníka, ktoré sú zároveň tri zo strán šesťuholníka. Z obrázku si vieme všimnúť dôležité veci:

Súčet obvodov troch malých trojuholníkov je **$9 \cdot x$**, a obvod šesťuholníka je **$3 \cdot x + 3 \cdot y$**. Keďže tieto čísla sú rovnaké, musia sa rovnať aj keď ich zapíšeme písmenkami. A keď odstránime rovnaké výrazy z oboch strán, dostaneme, že **$6 \cdot x = 3 \cdot y$** , a z toho **$2 \cdot x = y$**.

To isté sa ale dalo vidieť aj priamo na obrázku. Keďže tri vnútorné strany x sú spoločné pre trojuholníky aj šesťuholník, musia sa rovnať ich zvyšné dĺžky **$6 \cdot x$** a **$3 \cdot y$** · Alebo, keď si to premyslíme pre každú stranu veľkého trojuholníka, priamo vidíme, že **$2 \cdot x = y$**.

Zo všetkého ale vyplýva, že stranu veľkého trojuholníka vlastne musíme rozdeliť na štyri dĺžky ***x***. Dve krajné patria malým trojuholníkom a ***y*** rovnaké ako **$2 \cdot x$** šesťuholníku. Preto ***x*** bude ***60 : 4 = 15 cm***.



Na druhom obrázku vidíme iný spôsob riešenia. Ak hneď na začiatku využijeme, že strana má ***60 cm***, bude nám stačiť na pomoc len označenie strany malého trojuholníka ***x***. Dlhšia strana šesťuholníka je potom **$(60 - 2 \cdot x)$**. Keď si pomocou tohto zapíšeme súčet obvodov malých trojuholníkov a obvod šesťuholníka a dáme ich do rovnosti, úpravami tiež dostaneme, že ***x = 15 cm***.

Tretí typ vašich riešení spočíval v tom, že ste si tipli dĺžku strany malého trojuholníka, skontrolovali, či sa rovnajú potrebné obvody, a ak nie svoj tip ste upravili. Aj týmto spôsobom ste vedeli nájsť správnu odpoveď. Tu je ale problém, že keď ste dĺžky len skúšali, nemáte istotu, že ste našli jediné správne riešenie úlohy. Pokiaľ ste to nevysvetlili, bodov bolo trochu menej.

Úloha č. 3 *(opravovala Baša Marečáková)*

Väčšina z vás našla správne riešenie na otázku, koľko zrniek treba presypať. Spôsobov, ako sa k riešeniu dostať, je viacero. V tomto vzorovom riešení si predstavíme také, ktoré bude fungovať, aj keď sa potrebujeme dopočítať ku „škaredému" počtu zrniek.

Na presýpanie sa môžeme pozerať dvomi spôsobmi, buď koľko zrniek sa presype za jednu minútu, alebo koľko času pripadá na presýpanie jedného zrnka.

V modrých hodinkách sa presype **8000** zrniek za **60** minút. Za **1** minútu prejde **8000 : 60 = 133** a **1/3** zrnka. Na jedno zrnko pripadá **60 : 8000 = 0,0075** minúty.

V červených hodinkách sa presype **8000** zrniek za **44** minút. Za **1** minútu prejde **8000 : 44 = 181** a **9/11** zrnka. Na jedno zrnko pripadá **44 : 8000 = 0,0055** minúty.

Teraz si musíme položiť otázku, ktoré z týchto čísel nás vlastne zaujíma?

Chceme vedieť koľko zrniek musíme presunúť z modrých hodiniek (pomalších) do červených (rýchlejších), aby sme znížili čas o **2** minúty. Ak odoberieme nejaký počet zrniek z modrých, tak čas, o ktorý sa zníži presýpanie modrých hodín je **(náš počet zrniek) · 0,0075**. V červených to bude rovnaký počet vynásobený **0,0055**. Rovnaký počet je to preto, lebo zo zadania vieme, že musíme použiť všetky zrnká. Z tejto úvahy vyplýva, že budeme teda počítať s číslami, ktoré hovoria o minúte na zrnko.

Presunutie jedného zrnka z modrých do červených nám zníži celkový čas o **0,002** minúty. Vieme, že čas chceme znížiť o **2** minúty, čiže **2 : 0,002 = 1000** zrniek.

Spravme ešte skúšku správnosti, ak presunieme **1000** zrniek z modrých do červených hodiniek. Modré hodinky obsahujú **7000** zrniek, teda sa **60** min zníži o **1/8** času na **52,5** minúty. Červené hodinky obsahujú **9000** zrniek, teda sa **44** min zvýši o **1/8** času na **49,5** minúty. Celkový čas na presýpanie všetkých zrniek pri našom novom rozdelení je teda **102** minút, čo je o **2** minúty menej, ako pôvodne.

Potrebujeme presypať 1000 zrniek z modrých hodiniek do červených hodiniek.

Úloha č. 4 *(opravovala Ajka Kucharíková)*

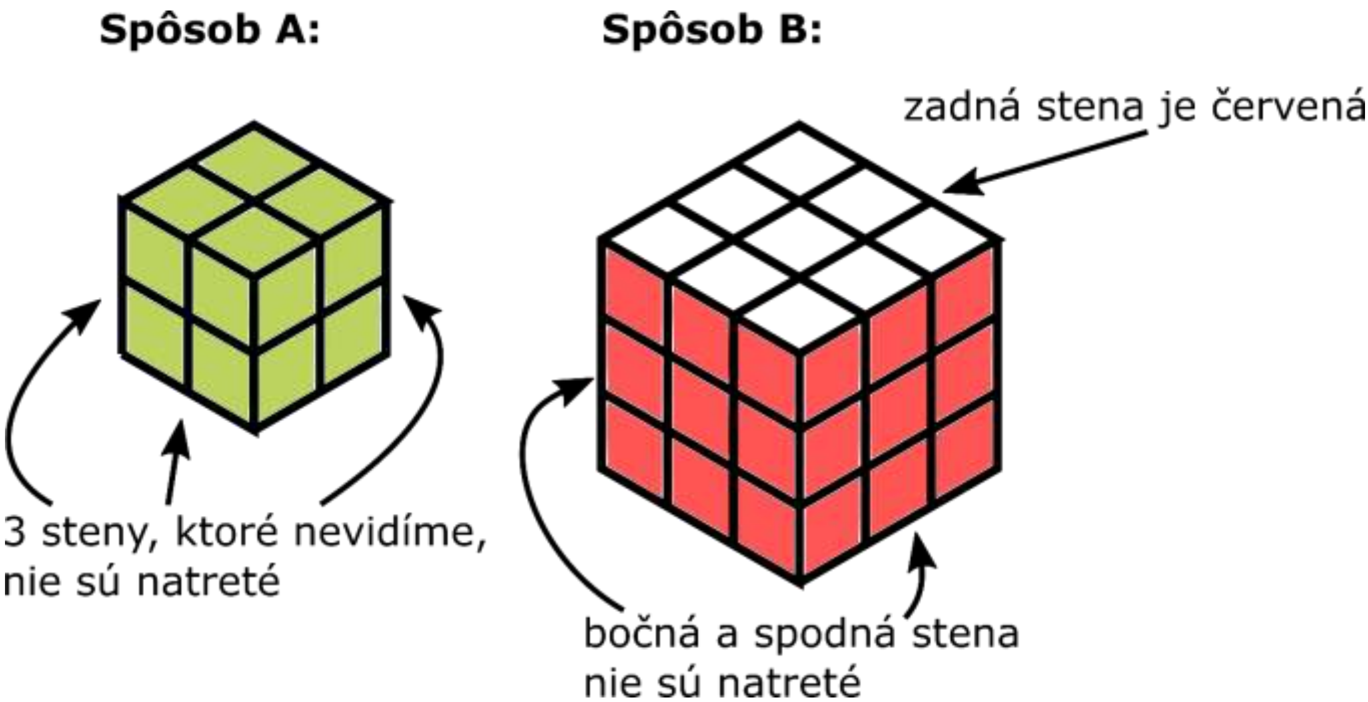
Našou úlohou je zistiť, ako sa môžu líšiť počty malých kociek zákusku s aspoň jednou červenou a s aspoň jednou zelenou stenou. Aby sme kocky mohli spočítať, tak najskôr musíme zistiť ako mohli vyzerať zákusky Dory a Marlina. To má dve časti. Potrebujeme zistiť z koľkých malých kociek mohli byť zákusky postavené a ako rôzne na nich mohla byť natretá poleva.

Pozrime sa najskôr na to z koľkých malých kociek môže byť zákusok poskladaný. Na poskladanie dvoch zákuskov máme dokopy **100** malých kociek a zákusky majú byť rovnako veľké, takže na jeden môžeme použiť najviac **50** kociek a najmenej **1** kocku. Navyše zákusok má byť tvaru kocky (pozor nie štvorca).

Najmenší zákusok, ktorý toto spĺňa je zákusok poskladaný z jednej malej kocky. Keď mu potom hocijako natrieme tri steny zelenou alebo červenou polevou, tak bude mať vždy presne jednu malú kocku natretú farbou. Počet červených a zelených kociek sa v tomto prípade nebude sa líšiť.

Skúsme nájsť väčšie zákusky tvaru kocky poskladané z najviac **50** malých kociek. Môžeme skúsiť zákusok so stranou dlhou **2** malé kocky. Teda *2 kocky dlhý* x *2 kocky široký* x *2 kocky vysoký* (**2 x 2 x 2**). Treba naň **2 · 2 · 2 = 8** malých kociek, čo je menej ako **50**. Ďalej by sa dal zákusok so stranou dlhou **3** malé kocky, teda **3 x 3 x 3** na ktorý treba **3 · 3 · 3 = 27** malých kociek. Zákusok so stranou **4** malé kocky, teda **4 x 4 x 4** na ktorý treba **4 · 4 · 4 = 64** malých kociek. To už je ale viac ako **50** kociek, ktoré môžeme použiť pre Marlina alebo Dory. Aj na hocijaký väčší zákusok, by už bolo treba viac kociek. Takže natierať polevou budeme len zákusky typu **2 x 2 x 2** a **3 x 3 x 3**.

Teraz sa potrebujeme zamyslieť, ako rôzne vieme natrieť zákusku tri steny polevou. Ak by sme ich totiž natreli rovnako, tak by aj počet malých kociek s aspoň jednou červenou a s aspoň jednou zelenou stenou boli rovnaké. Po zamyslení sa a skúšaní zistíme, že sú len dva rôzne spôsoby natretia zákusku (pozri obrázok). Spôsob A (Dory) – všetky tri natreté steny majú jeden spoločný vrchol. Napríklad predná, bočná a horná stena. Spôsob B (Marlin) – sú zafarbené dve protiľahlé steny a jedna medzi nimi. Napríklad predná, bočná a zadná stena. Ak by sme skúšali iné natretia, tak sa vždy budú dať pretočiť na jeden z týchto dvoch spôsobov natretia.



Teraz nám už len stačí natrieť zákusok Dory zelenou farbou spôsobom A a Marlinov zákusok červenou farbou spôsobom B a spočítať koľko sme natreli rôznych malých kociek. Pre zákusok veľkosti **2 x 2 x 2** pri natretí spôsobom A má aspoň jednu zelenú stenu **7** malých kociek. Pri natretí spôsobom B má aspoň jednu červenú stenu všetkých **8** malých kociek. **Rozdiel** medzi počtom natretých červených a zelených malých kociek je **8 − 7 = 1 malá kocka.**

Pre zákusok veľkosti **3 x 3 x 3** pri natretí spôsobom A má aspoň jednu zelenú stenu **19** malých kociek (Deväť natretých kociek na prednej stene. Deväť na bočnej stene, ale tri z nich sme už započítali na prednej stene, takže počítame už len šesť. Deväť na hornej stene, ale tri sme už započítali na prednej stene a dve ďalšie na bočnej, takže počítame už len štyri. Spolu **9 + 6 + 4 = 19**). Pri natretí spôsobom B má aspoň jednu červenú stenu **21** malých kociek (Deväť natretých kociek na prednej stene. Deväť na zadnej stene. Na bočnej stene ktorá je medzi nimi je tiež deväť kociek, ale tri sme už započítali na prednej stene a tri na zadnej, takže počítame už len tri. Spolu **9 + 9 + 3 = 21**).

Rozdiel medzi počtom červených a zelených malých kociek je **21 − 19 = 2 malé kocky.**

Podarilo sa nám nájsť rozdiely 1 a 2 malé kocky a ukázať, že už iný rozdiel nemôže byť.