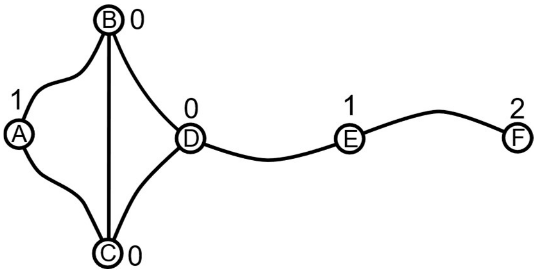
JSMF Žilina, Fakulta Riadenia a Informatiky ŽU
XXXV. ročník SEminára ZAujímavej Matematiky
pre 7. až 9. ročník ZŠ a sekundu až kvartu OG

S E Z A M, Školský rok 2021/2022, 3. letná séria
Vzorové riešenia

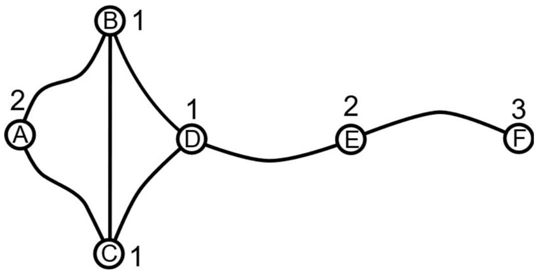
Úloha č. 1 (*opravoval Miloš Mičík****)***

Keď sa pozrieme na symbol v zadaní tak vidíme, že v symbole už máme tri korálky, z ktorých vychádzajú tri špagátiky. Keďže zo symbolu špagátiky nemôžeme odstraňovať, na každej z korálok budú uviazané aspoň tri špagátiky.

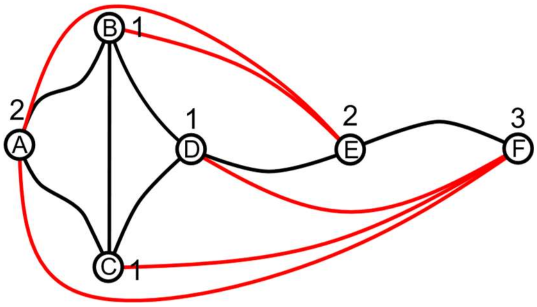
Keďže chceme špagátikov čo najmenej, pozrime sa na prípad, kedy budú na každej korálke uviazané presne tri špagátiky. Z obrázka vieme vyčítať, koľko špagátikov chýba každej korálke. Teraz vidíme, že korálke **F** potrebujeme pridať ešte dva špagátiky. Nakoľko nemôžeme spájať korálku samu so sebou, musíme ju spojiť s korálkami **A** a **E**. Avšak korálky **E** a **F** už spojené sú, a teda táto možnosť nie je platná. Z toho vyplýva, že korálky nevieme pospájať tak, aby mala každá práve tri špagáty.



Pozrime sa teda na prípad, kedy majú všetky korálky štyri uviazané špagátiky. Ak sa veľmi dobre zamyslíme, môžeme prísť na to, že ak máme šesť korálok, a na každej majú byť uviazané štyri špagátiky, budeme mať dokopy v symbole dvanásť špagátikov. Budeme mať **6 · 4 = 24** koncov špagátikov, no a každý špagátik má dva konce, čiže máme **24 : 2 = 12** špagátikov. Nezáleží teda na tom, ako korálky pospájame, budeme mať vždy presne **12** špagátikov. No a keďže v pôvodnom symbole ich bolo sedem, budeme ich musieť doplniť **päť**.



Vedieť toto nám však nestačí. Zatiaľ vieme iba to, že ak sa korálky dajú nejak pospájať tak, aby mala každá o seba uviazané štyri špagátiky, musíme ich pridať päť. Avšak nevieme, či sa to naozaj tak pospájať dá. Rôznymi spôsobmi, či už náhodným skúšaním alebo postupným vylučovaním vieme nájsť aspoň jedno riešenie. Jedno také je na obrázku vpravo.



Ak by sme si však neuvedomili, že špagátikov treba pridať vždy päť, nestačí nám nájsť iba jedno riešenie. Nemôžeme iba na základe jedného príkladu tvrdiť, že ich bude vždy päť. Musíme to aj nejak dokázať. V tejto úlohe sme mali dve možnosti – buď to dokážeme spočítaním koncov špagátikov, alebo nájdeme všetky možnosti, ako korálky pospájať (a zároveň dokážeme, že sme našli všetky). Všetky možnosti sa dalo nájsť pomerne ľahko, museli sme si však dať veľký pozor na to, aby sme nejakú možnosť nezabudli preskúmať.

Veľmi nám vedeli pomôcť korálky **D** a **F**. Korálka **D** bola už od začiatku spojená s tromi korálkami – vedeli by sme ju teda spojiť iba s korálkou **A** alebo **F**. Ľahko prídeme na to, že ak spojíme **D – A**, budeme musieť spojiť **A – F**, **B – C** a na konci nám ostane korálka **E**, ktorej chýbajú dva špagátiky, a nemáme ju s čím spojiť. Musíme teda spojiť **D – F**.

Potom nám pre korálku **A** ostávajú už iba korálky **E** a **F**. No a na konci nám ostávajú iba dve možnosti, a to spojiť korálku **C – F** a **B – E**, alebo naopak, **B – F** a **C – E**. Takto sme prešli cez všetky možnosti, ako sa dali korálky pospájať našli sme dve riešenia a potvrdili sme, že najmenej nám stačí do symbolu pridať päť špagátikov.

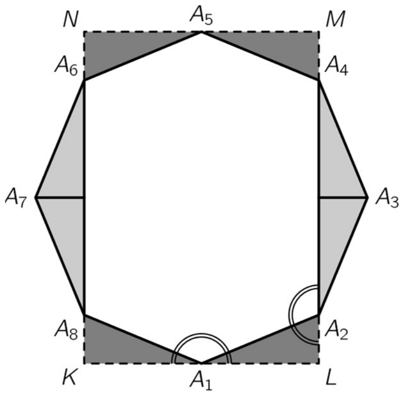
Úloha č. 2 (*opravoval Peťo Novotný)*

Úvodné poznámky: Táto úloha bola pomerne náročná kvôli tomu, že rezať sa dá nekonečne veľa spôsobmi a neexistuje univerzálny postup, ako riešenie nájsť. Vyžaduje to istú dávku intuície a nebáť sa experimentovať s rôznymi tvarmi. Našťastie existuje riešenie pre 5 častí aj pre 4 časti, takže ich stačí nájsť. (Dokazovať, že sa to nedá, by bolo oveľa náročnejšie.) Nemusíme ani nájsť všetky možné riešenia, keďže zadanie sa pýta len na to, či sa to dá.

Avšak v druhej časti zadania chceme ešte navyše zistiť, či výsledné dva obdĺžniky budú rovnaké alebo rôzne. Aby sme na toto správne odpovedali, nestačí nájsť jedno riešenie so 4 časťami, jedno riešenie s 5 časťami a porovnať, či sú obdĺžniky rovnaké. Nemáme totiž istotu, že sme našli tie isté riešenia ako Rowan s Berntom. Ak nám teda vyjdú rovnaké obdĺžniky, potrebujeme:

a) buď dokázať, že pri každom možnom riešení budú rovnaké,
b) alebo nájsť ešte ďalšie riešenie s odlišným obdĺžnikom, z čoho bude vyplývať, že obdĺžniky môžu byť aj rovnaké, aj rôzne.

Našťastie sa dá spraviť b), teda sa vyhneme dokazovaniu z a).

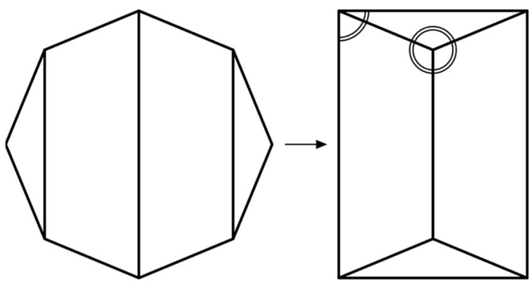


Riešenie: Najčastejšie sa vyskytujúce riešenie s 5 časťami (objavilo ho 23 riešiteľov) Je uvedené na prvom obrázku. Štyri svetlosivé trojuholníčky sa po odrezaní presunú do tmavosivých trojuholníčkov, biely šesťuholník ostane na mieste.

Aj keď sa nám (najmä, ak rysujeme presne) môže zdať jasné, že takto vznikol obdĺžnik, musíme to ešte zdôvodniť. Je zrejmé, že odrezané trojuholníčky presne priliehajú k stranám bieleho 6-uholníka (lebo pravidelný 8-uholník má všetky strany rovnako dlhé). Taktiež pravosť uhlov pri vrcholoch K, L, M, N netreba zdôvodňovať, keďže vyplýva z toho, že odrezané trojuholníčky sú pravouhlé (lebo sú to polovice rovnoramenných trojuholníkov $A_2A_3A_4$ a $A_6A_7A_8$).

Nie je ale zrejmé, že body K, A_1, L ležia na jednej priamke a podobne to nie je zrejmé pre ostatné tri úseky LA_2A_4M, MA_5N a NA_6A_8K. Teda nie je zrejmé, že výsledný útvar je naozaj 4-uholník a nie 10-uholník. Vďaka symetrickosti stačí vysvetliť, prečo súčet uhlov vo výslednom útvare pri bodoch A_1 aj A_2 je 180° (na obrázku zvýraznené oblúčikmi).

V pravidelnom 8-uholníku je pri každom vrchole uhol veľkosti 135° (skúste sami vysvetliť, prečo). Preto odrezané pravouhlé trojuholníčky majú pri prepone väčší uhol s veľkosťou 135° : 2 = 67,5° a menší s veľkosťou 90° − 67,5° = 22,5°. Pri bode A_1 sú teda naskladané uhly so súčtom 22,5° + 135° + 22,5° = 180°. Pri bode A_2 má uhol $A_1A_2A_4$ veľkosť 135° – 22,5° = 112,5° a teda dokopy aj tu máme 112,5° + 67,5° = 180°.



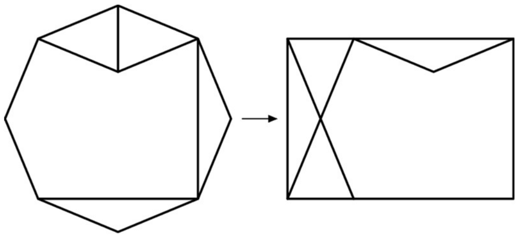
Riešenie so 4 časťami sa podarilo objaviť len 9 riešiteľom. Všetci pritom našli také isté riešenie a ani my iné nepoznáme (je teda dosť možné, že iné ani neexistuje – ale dokazovať to nemusíme). Znázornené je na druhom obrázku.

V tomto prípade potrebujeme zdôvodniť, že vo vnútorných bodoch sa uhly naskladajú presne na 360° (t. j. pri priliehajúcich častiach nebude medzera ani prekrývanie) a vo vrcholoch na 90°. Nemusíme však počítať žiadne nové uhly, lebo všetky sme už počítali na predošlom obrázku: Vo vnútorných bodoch máme 112,5° + 112,5° + 135° = 360° a vo vrcholoch 135° : 2 + 22,5° = 90°.

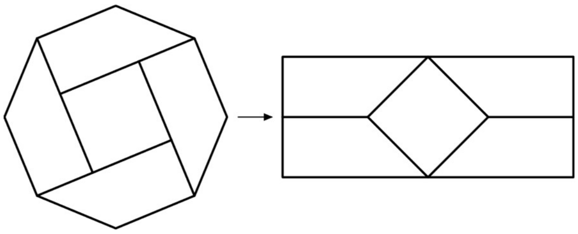
Rozmery výsledného obdĺžnika sú v oboch prípadoch rovnaké – dlhšia strana má rovnakú dĺžku ako je vzdialenosť dvoch protiľahlých vrcholov pôvodného 8-uholníka a kratšia strana má rovnakú dĺžku ako úsečka A_2A_4 na prvom obrázku.

V kontexte úvodných poznámok uveďme ešte ďalšie riešenia s 5 časťami (s cieľom vytvoriť obdĺžnik s inými rozmermi ako v predošlých dvoch prípadoch). Nebudeme už pri nich zdôvodňovať, že výsledné útvary sú naozaj obdĺžniky – to nechávame ako cvičenie pre čitateľov.

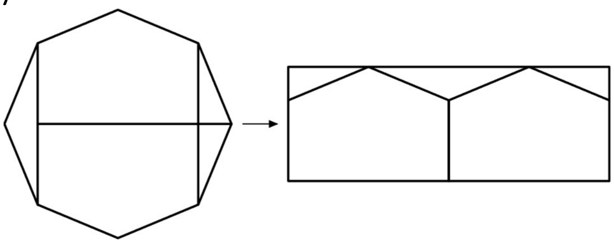
Bystrému riešiteľovi určite napadne, že keď máme riešenie so 4 časťami, vieme z neho vytvoriť nekonečne veľa rôznych riešení s 5 časťami: Stačí hociktorú zo 4 častí rozrezať ľubovoľným spôsobom na dve časti a vo výsledku ich k sebe zasa priložiť. Tým samozrejme dostaneme obdĺžnik s rovnakými rozmermi ako pri riešení so 4 časťami.



Lia Potanková objavila riešenie uvedené na treťom obrázku. Pri ňom vznikne obdĺžnik s rovnakými rozmermi ako v doteraz uvedených riešeniach.



Trom riešiteľom (Matej Cisko, Alexandra Klčová a Daniel Ondovčík) sa podarilo nájsť riešenie zo štvrtého obrázka. Pri ňom už sú rozmery obdĺžnika iné ako v doterajších riešeniach. Pri tomto riešení musíme dovoliť jednotlivé diely stola prevracať na opačnú stranu (to by nemusel byť problém, ak doska stola nemá z vrchnej strany nejaký iný povrch ako zospodu; v zadaní sme otáčanie explicitne nezakázali).



Ďalšie riešenie s iným rozmermi a bez potreby prevracania dielov nám poslal Igor Vargovič (piaty obrázok).

Napokon spomeňme, že existuje aj riešenie, pri ktorom vznikne štvorec (nechávame na každého rozhodnúť sa, či štvorec patrí medzi obdĺžniky a teda či by sa takéto riešenie malo uznať). Zvedavci ho nájdu na internetovej adrese https://www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book.html. Pri ňom je však trochu zložitejšie určiť, ako presne treba rezať, aby k sebe diely naozaj pasovali.

Úloha č. 3 *(opravovala Kika Ďuračíková)*

Poďme najprv zistiť, koľko podaní rúk sa mohlo odohrať. Ak by boli organizátori len dvaja, bolo by **1** podanie. Ak by k nim prišiel tretí, podal by si ruku s obidvoma, takže podaní by bolo dokopy **2 + 1**. Ak ba sa k nim pridal štvrtý organizátor, ešte by si navyše podal ruku s pôvodnými tromi – podaní by bolo **3 + 2 + 1**. Takto sa dá pokračovať ďalej, ak by bolo n organizátorov, spolu by si podali ruku **(n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1** krát.

Tu je niekoľko prvých možností:

Počet organizátorov	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Počet podaní rúk	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105

Poďme sa pozrieť, ktoré číslo zo spodného riadku vyhovuje podmienkam zo zadania.

1) Toto číslo má aspoň 3 delitele – môžeme vyhodiť čísla **1** a **3**.
2) Súčet deliteľov je menší ako 100 – medzi delitele čísla patrí aj číslo samotné, teda číslo **105** určite nebude spĺňať túto podmienku. Vďaka tejto podmienke nemusíme skúmať počet organizátorov viac ako 15, lebo počet podaní rúk by bol isto viac ako 100.
3) Súčin deliteľov je nepárny – teda číslo nemôže mať žiadneho párneho deliteľa. Medzi deliteľov patrí aj samotné číslo, takže môžeme vyhodiť všetky párne čísla.

Zostali nám čísla **15, 21, 45, 55** a **91**. Poďme sa vrátiť ku druhej podmienke a skontrolovať, či súčet ich deliteľov bude menší ako 100:

15 má deliteľov 1, 3, 5 a 15. Ich súčet je 24. 21 má deliteľov 1, 3, 7 a 21. Ich súčet je 32.
45 má deliteľov 1, 3, 5, 9, 15 a 45. Ich súčet je 78. 55 má deliteľov 1, 5, 11 a 55. Ich súčet je 72.
91 má deliteľov 1, 7, 13 a 91. Ich súčet je 112. To už je moc veľa, viac ako 100.

Čísla 15, 21, 45 a 55 spĺňajú podmienky zo zadania, preto počet organizátorov mohol byť **6, 7, 10** alebo **11**.

Úloha č. 4 (*opravoval Hynek Bachratý**)*

Vyriešiť úlohu o začiernení har-kocky a ste-kocky vôbec nebolo ľahké, a pochvalu majú všetci, ktorí sa do toho pustili.

Ťažším problémom bola hra-kocka, a preto začneme ňou. Všetci ste správne prišli na to, že celá na čierno sa prefarbiť nedá. Rozdiel ale bol v tom, ako presne a úplne sa vám to podarilo vysvetliť. To je komplikované preto, že zdôvodniť treba, že sa to nikdy nepodarí. K tomu treba nájsť a využiť vhodný všeobecný princíp, nestačí popísať alebo vylúčiť len niektoré postupy. Tiež bolo treba správne prepojiť popis toho, aká je kocka na začiatku, aká má byť na konci, a ako to súvisí s povoleným ťukaním na hrany. Ale viacerí to zvládli tak dobre, že v podstate len zopakujem váš postup. Na začiatku má kocka 3 čierne (a 3 biele) steny, čo je nepárny počet. Na konci má byť 6 čiernych (a 0 bielych), čo sú párne počty. Zmeniť farbu teda potrebuje nepárny počet čiernych (aj bielych) stien.

Dá sa to alebo nie? Pozor, ťukať môžem koľko krát chcem, po rôznych kombináciách hrán, možností je veľmi (alebo nekonečne?) veľa. Jedna dôležitá vec sa ale pri každom zaťukaní mení rovnako, a to je parita celkového počtu čiernych a celkového počtu bielych stien. Ak totiž ťuknem na hranu, spájajúcu čiernu a bielu stenu, tie si svoje farby len „prehodia“, a teda nie len parita, ale aj počet čiernych a bielych stien zostane rovnaký. Ak ťuknem na hranu spájajúci dve biele steny, obe sa zmenia na čierne. Počet čiernych stien sa tak o 2 zväčší (a bielych o 2 zmenší), ale nezmení sa z párneho na nepárny alebo naopak. A v princípe to isté platí, ak ťuknem na hranu ktorá spája dve čierne steny. Obe sa zmenia na biele, a teda počet čiernych sa o 2 zmenší (a bielych o dve zväčší) takže zostane rovnako párny alebo nepárny, ako bol pred tým. A tým je zdôvodnenie kompletné. Na začiatku má kocka nepárny počet (tri) čierne steny, a keďže každým klepnutím ich paritu nezmením, nikdy sa nemôžem prepracovať k celej čiernej kocke, ktorá má párny počet (6) čiernych stien. (Inak povedané, keďže na začiatku máme 3 čierne steny a po každom ťuknutí ich počet zostane rovnaký, alebo dve pribudnú, alebo dve ubudnú. Nech teda ťukám kdekoľvek a akokoľvek dlho, stále sa bude na kocke striedať len počet 1, 3, 5 čiernych kociek, a nikdy nie 6.)

Ste-kocka bola jednoduchší problém, pretože tá začierniť ide. Dali sa k tomu využiť aj podobné úvahy o parite, neboli ale úplne potrebné. Po troche rozmýšľania sa dali nájsť tri správne ťuky, bolo len treba jasne znázorniť, že kocka je po nich naozaj celá čierna. To sa dalo dobre napríklad obrázkom siete kocky, ale aj tabuľkou alebo len počítaním farieb stien. Na začiatku má ste-kocka 3 čierne a 3 biele steny. Prvý ťuk môže byť na ľubovoľnej čiernej stene. Tá čierna zostane a na čiernu sa zmenia aj 3 biele, zvyšné 2 biele sa zmenia na 2 čierne. Po prvom ťuku tak má kocka 4 čierne a 2 biele steny. Teraz ťukneme na ľubovoľnú bielu stenu. Tá zostane biela, a pribudnú 4 z čiernej na bielu zmenené steny. Len zvyšná biela sa zmení na 1 čiernu. Celkovo teda po druhom ťuku máme 5 bielych a 1 čiernu stenu. Tretí ťuk na túto jedinú čiernu prefarbenie ste-kocky dokončí.