SEZAM, školský rok 2007/08, vzorové riešenia 1. zimnej série

Milí riešitelia,

Sme veľmi radi, ako úspešne ste sa popasovali s úlohami v prvej sérii SEZAMu. Ako to zatiaľ vyzerá, to ľahko zistíte z poradia. Ešte sú však pred nami dve série, ktoré ním môžu poriadne zamiešať. Preto ak máte kamaráta či spolužiaka, ktorý by rád riešil SEZAM, pokojne mu požičajte zadania – aj s dvoma vyriešenými sériami sa mu možno podarí dostať sa na zimné sústredenie. A určite si vylepší svoje matematické schopnosti.

Predtým, než sa s vervou vrhnete na nové štyri Alicine a Sherlockove príhody, určite si prečítajte vzorové riešenia úloh prvej série. Dozviete sa, ako sa dali úlohy riešiť, a nabudúce podobné úlohy zvládnete lepšie. Ešte malá prosba, skontrolujte si v poradí vaše údaje. Ak by tam boli nejaké chyby, dajte nám to spolu s druhou sériou vedieť. Pokiaľ niektoré údaje chýbajú, treba poriadne vypĺňať hlavičku.

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`. Môžete si tam pozrieť fotky z táborov, prečítať si zadania a riešenia starších úloh či porozprávať sa s riešiteľmi a vedúcimi na našej nástenke.

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Michal Prusák.

1. príklad

(opravovala Lenka Trojaková)

Máme 3 druhy korálikov a vieme, že každý druh má inú hmotnosť. Perlový váži 10 gramov, smaragdový 11 gramov a diamantový má 12 gramov. Chceme zistiť, aký najťažší náhrdelník sa z týchto korálikov nedá poskladať. Je to prekvapujúce, ale na vyriešenie úlohy stačilo poriadne si všímať poslednú cifru (na mieste jednotiek, napríklad v hmotnosti 147 gramov je na mieste jednotiek 7) v celkovej hmotnosti náhrdelníka.

Vieme vyrobiť náhrdelníky so všetkými možnými ciframi na mieste jednotiek? Poďme sa na to pozrieť. **Budeme používať čo najmenej korálikov.** Totiž ak dokážeme urobiť napríklad 9-gramový náhrdelník, tak potom vieme urobiť aj 19 či 29-gramový pridaním niekoľkých 10-gramových perlových korálikov. Jednotlivé cifry na mieste jednotiek vieme vyrobiť takto:

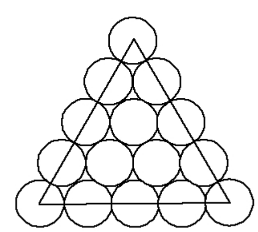
0: 10	5: $12+12+11$
1: 11	6: $12+12+12$
2: 12	7: $12+12+12+11$
3: $12+11$	8: $12+12+12+12$
4: $12+12$	9: $12+12+12+12+11$

Z tejto tabuľky vidíme, že najviac korálikov potrebujeme na vytvorenie náhrdelníka, ktorého hmotnosť má na mieste jednotiek cifru 9. Budeme naň potrebovať aspoň 5 korálikov. To znamená, že najľahší náhrdelník s deviatkou na mieste jednotiek bude mať $12+12+12+12+11 = 59$ gramov.

Potom ale nevieme navliecť náhrdelník s hmotnosťou 49 gramov. Ťažšie náhrdelníky už majú na konci cifry, ktoré pomocou vhodného počtu korálikov vytvoriť vieme, preto sa všetky ťažšie náhrdelníky už dajú vytvoriť. Naopak náhrdelníky, ktoré sa nedajú vyrobiť kvôli iným cifrám (napríklad 38 gramov), sú ľahšie ako 49 gramov, a preto nebudú najťažšie. **Preto najťažší náhrdelník, ktorý nevieme navliecť, váži 49 gramov**. No a ako vaše šikovné deduktívne schopnosti zistili, doktor Watson má teda 49 rokov.

2. príklad

(opravovala Ika Bachratá)



V tomto príklade si bolo treba na začiatku všimnúť, že priamo z obrázka v zadaní výšku pyramídy vyrátame len ťažko. Bolo výhodné dokresliť si niekoľko šikovných čiar. Pekne to vyjde napríklad vtedy, keď pospájame stredy „rohových" kruhov ako na obrázku (smelo si do neho kreslite). Vznikol nám **rovnostranný trojuholník**, lebo každá z jeho strán ide rovno zo stredu jedného kruhu do stredu iného kruhu a prechádza cez rovnaký počet kruhov.

Poďme zistiť, koľko meria strana takéhoto trojuholníka. Od stredu prvého kruhu po jeho obvod je to jeho polomer, teda polovička priemeru, čo je $0,5$ dm. Potom sa prvý kruh priamo dotýka ďalšieho. Strana trojuholníka prechádza stredom tohto kruhu, takže pripočítame priemer, čo je 1 dm. To isté platí aj pre ďalšie dva kruhy, na záver je ešte jeden polomer „rohového" kruhu. Spolu máme $0,5+1+1+1+0,5 = 4$ dm. Takže už vieme, že **rovnostranný trojuholník má strany dlhé 4 dm**.

Nás by zo všetkého najviac zaujímalo, koľko meria jeho výška. Vieme, že výška v rovnostrannom trojuholníku rozpolí stranu na dve rovnako dlhé úsečky. V našom prípade budú mať tieto úsečky dĺžku $4\text{ dm}/2 = 2$ dm. Keďže výška je kolmá na stranu, máme pravouhlý trojuholník, v ktorom poznáme dve strany. Preponu (tak sa volá tá najdlhšia strana) a jednu odvesnu (odvesny sú tie zvyšné dve strany v pravouhlom trojuholníku, ktoré sú na seba kolmé).

Odvesna meria 2 dm, prepona 4 dm. Teraz si pomôžeme **Pytagorovou vetou**. Tá hovorí $a^2 + b^2 = c^2$, kde a, b sú dĺžky odvesien a c je dĺžka prepony v pravouhlom trojuholníku. Keď dosadíme dĺžky strán, ktoré poznáme, dostaneme $2^2 + b^2 = 4^2$. Z toho ľahko vypočítame, že výška trojuholníka b meria $\sqrt{12}$.

To ale ešte nie je výška celej pyramídy. Chýba nám $0,5$ dm od stredu vrchnej kružnice po jej vrch a tiež $0,5$ dm od stredu spodnej strednej kružnice po jej úplný spodok (pozrite si to na obrázku). **Teda výška pyramídy je spolu $\sqrt{12}+1$ dm.** Veľa z vás ešte tento výraz vyjadrovalo pomocou desatinného čísla, ale to nebolo treba. Napokon, takto je to aj tak najpresnejšie.

3. príklad *(opravovala Kačka Bachratá)*

V prvom rade treba povedať, že úloha bola dosť neobvyklá a chceme pochváliť všetkých, ktorí sa odvážili pustiť sa do riešenia. Keď ste urobili podobný experiment ako Alica a hádzali kockou dovtedy, kým vám napríklad 100-krát padla šestka, všimli ste si, že **častejšie sa to stáva na druhý krát než na piaty**. No a mali ste potom dosť času a materiálu, aby ste vymysleli, prečo to tak je. Tie zdôvodnenia neboli vždy úplne presné, ale to sa v tejto oblasti ani nedá. Dokonca by sa mohlo stať, že niekomu pri 100 pokusoch padne šestka častejšie na piaty než na druhý krát. Ale to naozaj len veľmi výnimočne raz za 100 rokov.

Aby sme si vysvetlili, prečo to tak vlastne je, uvádzame riešenie niektorých z vás. Namiesto 100 hádzaní jednou kockou budeme **hádzať naraz 100 kockami**. Keď padne na kocke šestka, zapíšeme príslušné číslo a už ju nebudeme ďalej hádzať. Po prvom hode asi na šestine kociek padne šestka. Zapíšeme za každú z nich jedničku, dáme ich nabok (pre ne už pokus skončil) a hádžeme ďalej s menším počtom – približne 83 kockami. Po druhom hádzaní s 83 kockami opäť asi na šestine z nich padne šestka, čo je asi na 14. Zapíšeme si príslušný počet dvojok, kocky odložíme a hádžeme ďalej s približne 69 kockami. Po treťom hádzaní so 69 kockami asi na šestine z nich padne šestka, zapíšeme trojky, kocky vylúčime a ďalej budeme hádzať iba s približne 57 kockami. Po štvrtom hádzaní 57 kockami asi na šestine z nich padne šestka, tie vylúčime a hádžeme ďalej s menším počtom – približne 47 kockami.

Pri piatom hádzaní mám k dispozícii asi 47 kociek a asi na šestine z nich padne šestka. Toľko si zapíšeme pätiek. **Bude to teda asi na 8 kockách, pričom po druhom hode to bolo až na približne 14 kockách.** Alebo ešte jednoduchšie, tie kocky, na ktorých šestka padla na druhý krát už nepoužívam pri hádzaní na piaty krát, takže šestiek na piaty krát bude skoro určite menej.

4. príklad *(opravovala Erika Trojáková)*

Keďže tanečný pár tvorí dievča s chlapcom o tri roky starším, musí byť súčet vekov tanečného páru nepárne číslo (lebo je to vždy súčet párneho a nepárneho čísla). Na základe tohto môžeme povedať, že Júlia netancuje s Igorom, lebo spolu majú 36 rokov (čo je párne číslo). Z toho istého dôvodu nemôže tancovať ani s Andrejom (lebo majú dokopy 40 rokov). **Čiže pre Júliu nám zostal už iba jeden tanečný partner, a to je Martin.**

Vieme, že Daniela je najmladšia, a z toho na základe Betkinej informácie vieme, že aj jej partner bude najmladší z chlapcov. Z dvojice chlapcov Igor a Andrej je mladší Igor, lebo súčet Júliinho veku s Igorovým je nižší ako súčet Júliinho veku s Andrejovým. Martin určite musí tancovať s Júliou, a teda **Daniela musí tancovať s Igorom. Pre Betku už zostal iba Andrej.**

To znamená, že bez toho, aby sme poznali veky tanečníkov, sa nám podarilo zistiť tanečné páry. Tancujú v nich dvojice Andrej a Betka, Daniela a Igor, Júlia a Martin. Keďže v zadaní máme ešte aj ďalšie informácie, musíme zistiť, či takéto rozdelenie tanečných párov vyhovuje všetkým vyjadreniam tanečníkov. Označme preto Júliin vek J. Potom vek Martina je $J+3$, vek Igora je $36-J$, aby mali spolu 36 rokov. Vek Daniely je $36-J-3$, vek Andreja je $40-J$ a vek Betky je $40-J-3$ (používame informáciu, že pár tvorí dievča s chlapcom o tri roky starším).

Na základe Igorovej informácie vieme, že súčet jednotlivých vekov má byť 115, čiže

$$115 = J + (J+3) + (36-J) + (36-J-3) + (40-J) + (40-J-3) = 149 - 2J,$$

čo je to isté ako $115 = 149 - 2J$. Teda Júliin vek je z tejto rovnice rovný $(149-115)/2 = 17$ rokov. To znamená, že Julkin tanečný partner Martin má 20 rokov, Igor má $36-17 = 19$ rokov, Daniela má $19-3 = 16$ rokov, Andrej má $40-17 = 23$ rokov a Betka musí mať $23-3 = 20$ rokov. Keď skontrolujeme vyjadrenia tanečníkov, naše výsledky vyhovujú všetkým, až na Danielin. Vidíme totiž, že **Martin a Betka majú rovnako veľa rokov. Tanečníci sa preto nedajú rozdeliť do párov tak, aby sme vyhoveli všetkým podmienkam, a teda úloha nemá riešenie.** Aspoň jeden z tanečníkov nehovoril pravdu. Samozrejme, šikovný Sherlock si to všimol. Rovnako ako niektorí z vás.

Výsledky ankety o úlohách 1. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	7	5	2	9
najmenej sa páčila	2	7	12	3
najťažšia bola	5	4	8	6
najľahšia bola	5	7	5	6