SEZAM, školský rok 2009/10, vzorové riešenia 3. letnej série

Milí riešitelia,
v strašidelnom príbehu napokon všetko dobre dopadlo. Sme veľmi radi, že ste tento príbeh sledovali až do konca a pomáhali Oliverovi a strašidlu, ktorých (samozrejme úplnou náhodou) postretávali samé matematické problémy. Už teraz sa môžete tešiť na september, kedy do vašich poštových schránok zavíta prvá séria SEZAMu spolu s novými rozprávkovými hrdinami.

Dovtedy je času dosť, opravte si známky v škole (ak máte aké) a poriadne si užite letné prázdniny. Ak sa vám v SEZAMe darilo, hádam ste si v obálke našli aj pozvánku na letný tábor pre najlepších riešiteľov. Okrem strašidla na Bojnickom zámku vás čaká desať augustových dní plných hier, zábavy, nových super kamarátov a popri tom, ako inak, aj trocha matematiky.

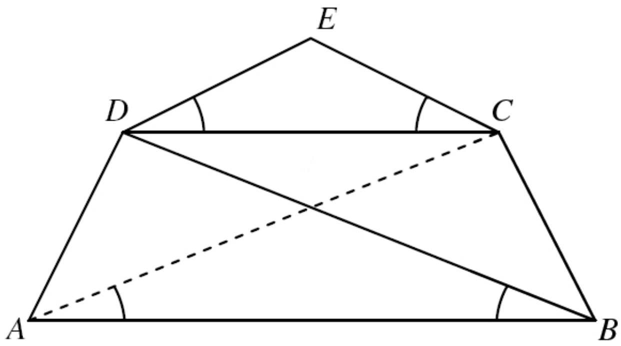
Aby ste však do septembra úplne nezabudli počítať, prečítajte si tieto vzorové riešenia. Možno sú troška dlhšie, než ste zvyknutí, ale o to viac nových vecí sa z nich môžete naučiť.

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`.

Za organizátorov vám slnečné leto a pekné prázdniny želá Michal Prusák.

1. príklad

(opravoval Jakub Daubner)



Zo zadania vieme, že trojuholník DCE je rovnoramenný, preto majú uhly EDC a DCE rovnakú veľkosť. Takisto vieme, že základne lichobežníka AB a CD sú rovnobežné. Navyše sú podľa zadania rovnobežné aj úsečky CE a BD. To znamená, že úsečky CE a CD zvierajú ten istý uhol ako úsečky AB a BD, takže uhly DCE a ABD majú rovnakú veľkosť. Tieto dva uhly sú vyznačené oblúčikmi na pravej strane lichobežníka.

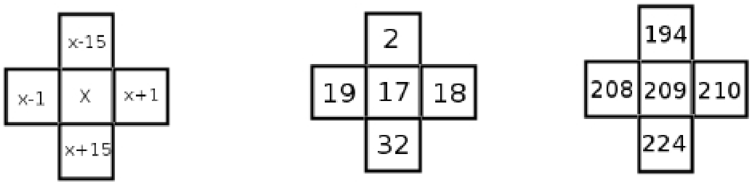
Napokon využijeme ešte to, že lichobežník je rovnoramenný. Preto aj uhly ABD a CAB majú rovnakú veľkosť. My sme mali za úlohu zistiť, či sú uhly CAB a EDC rovnaké. Postupne sme dokázali, že všetky štyri uhly EDC, DCE, ABD, CAB majú navzájom po dvojiciach rovnakú veľkosť. To znamená, že aj naše **uhly CAB a EDC majú rovnakú veľkosť**.

Komentár k riešeniam: Poslali ste nám veľa pekných riešení. Najčastejšou chybou (ktorú spravili niektorí z vás) bolo bez vysvetlenia tvrdiť, že strany AC a DE musia byť rovnobežné. Tento fakt však v zadaní nebol, pomocou neho bolo ľahké dokázať, že spomínané dva uhly sú rovnaké. Za takýto nedostatok ste mohli stratiť až dva body.

2. príklad

(opravovala Lenka Trojaková)

Máme šachovnicu rozmerov 15×15, do ktorej sú postupne vpísané čísla 1 až 225. Chceme nájsť také polohy kartičky v tvare ako na obrázku, aby súčet čísel, ktoré kartička zakrýva, bol druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla.



Označme číslo, ktoré zakrýva stredný štvorček kartičky ako x. Potom číslo v hornom štvorčeku je $x-15$, keďže v každom riadku šachovnice je 15 čísel. Podobne číslo pod stredným štvorčekom je $x+15$. Ďalej číslo vľavo sa dá napísať ako $x-1$ a číslo vpravo ako $x+1$. Keď všetky tieto čísla sčítame, dostávame $x+(x-15)+(x+15)+(x-1)+(x+1) = 5x$. **Súčet čísel pod kartičkou musí byť deliteľný číslom 5**, preto budeme hľadať druhú mocninu nejakého prirodzeného čísla, ktorá je deliteľná číslom 5.

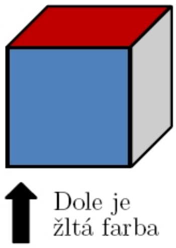
Ďalej sa pozrime na to, aký najmenší a aký najväčší súčet čísel pod kartičkou vieme dostať. Na ďalších dvoch obrázkoch sú znázornené krajné pozície, kedy sa snažíme kríž posunúť čo najviac do ľavého horného a pravého dolného rohu. Najmenší súčet je preto 85 (súčet čísel na prvom obrázku) a najväčší 1045 (súčet čísel na druhom obrázku). Potrebujeme zistiť, **ktoré čísla od 85 do 1045 sú druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla a zároveň sú deliteľné 5**.

Prvá taká druhá mocnina za číslom 85 je až $10 \cdot 10 = 100$. Posledná druhá mocnina, ktorá je ešte menšia ako 1045, je $32 \cdot 32 = 1024$. Stačí sa nám preto pozerať na druhé mocniny čísel od 10 do 32, ktoré sú navyše deliteľné piatimi. Také sú $10 \cdot 10 = 100$, $15 \cdot 15 = 225$, $20 \cdot 20 = 400$, $25 \cdot 25 = 625$ a $30 \cdot 30 = 900$. Predtým sme už zistili, že číslo x v strednom štvorčeku kartičky dostaneme tak, že príslušnú druhú mocninu vydelíme piatimi. Dostaneme tak pozíciu stredného štvorčeka (a teda celej kartičky). Tieto pozície postupne sú 20 (100 delené piatimi), 45, 80, 125 a napokon 180 (900 delené piatimi).

Potrebujeme ešte overiť jednu vec, a to či niektorá z piatich nájdených kartičiek „netrčí“ zo šachovnice. Skúste si sami nakresliť šachovnicu zo zadania a umiestniť postupne stred kartičky na čísla 20, 45, 80, 125 a 180. Mali by ste zistiť, že **v prípade stredov na číslach 45 a 180, kartička pretŕča z plánika. Vyhovujú preto iba tri ostatné stredy kartičiek, a to 20, 80 a 125.** Týmto trom stredom kartičiek zodpovedajú druhé mocniny 100, 400 a 625. Ako sme ukázali, toto sú jediné riešenia.

3. príklad

(opravovala Erika Trojáková)



Našou úlohou je zistiť, koľko rôznych farebných kociek strašidlo urobilo. Spočítať ich len tak, bez dobrého postupu, nepôjde vôbec jednoducho. Zavedieme si preto systém, ktorý nám počítanie zjednoduší. Predstavme si preto, že ideme najskôr vyrobiť všetky kocky, ktoré majú **dolnú stenu žltú a hornú stenu červenú**.

Na zvyšné štyri steny nám ostali štyri farby. Začnime prednou stenou, máme pri nej na výber štyri farby. Kocku však vieme otáčať tak, aby aj bočné a dokonca aj zadná stena boli vpredu. Môžeme si preto predstaviť, že sme prednú stenu rovno ofarbili na modro. Inak by sme modrou museli ofarbiť bočné alebo zadnú stenu a vedeli by sme tú kocku natočiť tak, aby bola modrá vpredu.

Takže vpredu máme modrú farbu a na omaľovanie zvyšných troch stien máme zvyšné tri farby. Ľavú stenu môžeme ofarbiť ktoroukoľvek zo zvyšných troch farieb. Na zadnú stenu nám potom ostanú dve farby a poslednú pravú stenu ofarbíme (poslednou) zvyšnou farbou. To znamená, že **ak máme dole žltú a hore červenú stenu, vieme vyrobiť $3 \cdot 2 = 6$ kociek**.

Oproti dolnej žltej stene však môže byť aj iná farba ako červená. Bez ohľadu na to, či hore dáme modrú, zelenú, hnedú alebo čiernu farbu, zakaždým budeme vedieť vyrobiť presne šesť kociek s danou konkrétnou farbou hore (rovnako ako keď tam bola červená). Keďže na výber hornej farby máme 5 možností (šiesta žltá farba stále ostáva na dolnej stene) a pri každej z nich vieme vyrobiť 6 kociek, **spolu budeme vedieť vyrobiť $5 \cdot 6 = 30$ kociek**. Ešte je dôležité uvedomiť si, že sme takýmto spôsobom započítali každú kocku. Je to preto, lebo každú kocku vieme natočiť tak, aby bola žltou stenou dolu.

4. príklad

(opravoval Peťo Novotný)

Posledná úloha letnej časti vám dala celkom zabrať. Vyskytli sa dva typy riešení. Pri tom prvom ste štyri bábovkové pekné kúsky (zlomky) hľadali tak, že ste vytvorili jeden zlomok s takým menovateľom, ktorý má veľa rôznych deliteľov. Do čitateľa ste sa potom snažili doplniť štyri čísla, ktoré v súčte dávajú menovateľ a pritom sú to delitele menovateľa. Ilustrujme to na jednom príklade. Do menovateľa dáme číslo 12:

$$\frac{\square + \square + \square + \square}{12}$$

Na voľné miesta do čitateľa chceme spomedzi deliteľov menovateľa $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ doplniť štyri rôzne, ktorých súčet je 12. Ľahko nájdeme jedinú možnosť: $12 = 6 + 3 + 2 + 1$. Úpravou potom dostaneme

$$1 = \frac{12}{12} = \frac{6+3+2+1}{12} = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12},$$

čo je jeden z možných spôsobov krájania: Jupiter dostane $\frac{1}{2}$ bábovky, Oliver $\frac{1}{4}$, Klára $\frac{1}{6}$ a strašidlo $\frac{1}{12}$.

Takýto postup má dve nevýhody. Prvou je, že kým nájdeme všetky možné spôsoby, musíme vyskúšať dať do menovateľa veľa rôznych čísel. Pri tom sa ľahko pomýlime a ľahko môžeme na niektorú možnosť zabudnúť. Druhou – závažnejšou nevýhodou je, že aj keď možno nájdeme všetky spôsoby, nebudeme mať istotu, že sme ich našli naozaj všetky. Čísel, ktoré môžeme dať do menovateľa, je totiž nekonečne veľa a všetky ich vyskúšať nedokážeme. Druhý spôsob riešenia, ktorý uvedieme, týmto nedostatkom netrpí.

Hlavná myšlienka spočíva v tom, že keď chceme bábovku rozdeliť na štyri pekné kúsky, pre tie najväčšie z nich nemáme príliš veľa možností: Ak by sme Jupiterovi dali iba $\frac{1}{3}$ bábovky, prípadne ešte menší kúsok, tak Oliver by nedostal viac ako $\frac{1}{4}$, Klára by mala maximálne $\frac{1}{5}$ a strašidlo by dostalo najviac $\frac{1}{6}$ bábovky. Spolu by tak zjedli nie viac ako

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{20+15+12+10}{60} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20} < 1,$$

teda by nebola rozdelená celá bábovka. Neostáva nám teda nič iné ako **dať Jupiterovi $\frac{1}{2}$ bábovky** (všetky ostatné pekné zlomky nie sú väčšie ako $\frac{1}{3}$).

Tým sme úlohu celkom zjednodušili. Namiesto štyroch pekných zlomkov, ktorých súčet je 1, už hľadáme iba tri pekné zlomky, ktoré doplnia Jupiterov kúsok do celej bábovky, teda také, ktorých súčet je $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Pokračovať budeme opäť od najväčšieho zo zvyšných kúskov, teda od Oliverovho. Ten musí byť menší ako Jupiterov – nemôže to byť $\frac{1}{2}$. Vyskúšame za Oliverov kúsok doplniť postupne zlomky $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$.

- Ak **Oliver dostane $\frac{1}{3}$ bábovky**, pre zvyšných dvoch maškrtníkov zvýši $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ bábovky. Chceme teda rozdeliť číslo $\frac{1}{6}$ na súčet dvoch pekných zlomkov. Je jasné, že oba budú menšie ako $\frac{1}{6}$, teda maximálne $\frac{1}{7}$. Vyskúšame zasa jednotlivé zlomky $\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots$, či by mohli byť Klárinou časťou.
  - Ak Klára dostane $\frac{1}{7}$, pre strašidlo ostane $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{7}{42} - \frac{6}{42} = \frac{1}{42}$. Máme tak prvý vyhovujúci spôsob krájania:

    $$1 = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}}.$$

  - Ak Klára dostane $\frac{1}{8}$, pre strašidlo zvýši $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{4}{24} - \frac{3}{24} = \frac{1}{24}$. Druhý spôsob krájania je teda

    $$1 = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24}}.$$

– Ak Klára dostane $\frac{1}{9}$, strašidlo dostane $\frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{3}{18} - \frac{2}{18} = \frac{1}{18}$. Tretí spôsob krájania je

$$1 = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}}.$$

– Ak Klára dostane $\frac{1}{10}$, strašidlo dostane $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$. Štvrtý spôsob krájania je

$$1 = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}}.$$

– Ak Klára dostane $\frac{1}{11}$, strašidlo dostane $\frac{1}{6} - \frac{1}{11} = \frac{11}{66} - \frac{6}{66} = \frac{5}{66}$. To však nie je pekný zlomok, takže táto možnosť nevyhovuje.

– Ak Klára dostane $\frac{1}{12}$, strašidlo dostane $\frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$. Strašidlo však nemôže dostať rovnaký kúsok ako Klára. Táto možnosť preto nevyhovuje. Rovnako už nevyhovuje ani žiadna ďalšia možnosť, lebo ak by Klára dostala menej ako $\frac{1}{12}$, strašidlo by muselo dostať celý zvyšok, čo by bolo viac ako $\frac{1}{12}$ (spolu majú totiž $\frac{1}{6}$, čo sú presne $\frac{2}{12}$). A to je proti pravidlám, strašidlo má mať najmenší kúsok.

Tým sme vyčerpali celý prípad, keď Oliver dostane $\frac{1}{3}$ bábovky.

- Ak **Oliver dostane $\frac{1}{4}$ bábovky**, pre zvyšných dvoch zvýši $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ bábovky. Chceme teda rozdeliť číslo $\frac{1}{4}$ na súčet dvoch pekných zlomkov. Oba budú menšie ako $\frac{1}{4}$, teda maximálne $\frac{1}{5}$. Vyskúšame jednotlivé zlomky $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$, či by mohli byť Klárinou porciou.

– Ak Klára dostane $\frac{1}{5}$, pre strašidlo ostane $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20}$. To je piaty spôsob krájania:

$$1 = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}}.$$

– Ak Klára dostane $\frac{1}{6}$, pre strašidlo ostane $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12}$. To je šiesty spôsob krájania:

$$1 = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}}.$$

– Ak Klára dostane $\frac{1}{7}$, pre strašidlo ostane $\frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{7}{28} - \frac{4}{28} = \frac{3}{28}$. To však nie je pekný zlomok, takže táto možnosť nevyhovuje.

– Ak Klára dostane $\frac{1}{8}$, strašidlo dostane $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$. Strašidlo však nemôže dostať rovnaký kúsok ako Klára. Táto možnosť preto nevyhovuje. Rovnako už nevyhovuje ani žiadna ďalšia možnosť, lebo ak by Klára dostala menej ako $\frac{1}{8}$, strašidlo by muselo dostať celý zvyšok, čo by bolo viac ako $\frac{1}{8}$, a to je (podobne ako predtým) proti pravidlám.

Tým sme vyčerpali celý prípad, keď Oliver dostane $\frac{1}{4}$ bábovky.

- Ak **Oliver dostane $\frac{1}{5}$ bábovky**, pre zvyšných dvoch zvýši $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$ bábovky. Chceme teda rozdeliť číslo $\frac{3}{10}$ na súčet dvoch pekných zlomkov. Oba musia byť menšie ako Oliverova $\frac{1}{5}$, teda maximálne $\frac{1}{6}$. Vyskúšame jednotlivé zlomky $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$, či by mohli byť Klárinou porciou.

– Ak Klára dostane $\frac{1}{6}$, pre strašidlo ostane $\frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{9}{30} - \frac{5}{30} = \frac{4}{20} = \frac{2}{15}$. To nie je pekný zlomok, takže táto možnosť nevyhovuje.

– Ak Klára dostane $\frac{1}{7}$, pre strašidlo ostane $\frac{3}{10} - \frac{1}{7} = \frac{21}{70} - \frac{10}{70} = \frac{11}{70}$. To nie je pekný zlomok, takže táto možnosť nevyhovuje. Navyše $\frac{11}{70} > \frac{1}{7}$, teda strašidlo by dostalo viac ako Klára. Podobne keby Klára dostala menej ako $\frac{1}{7}$, strašidlo by muselo dostať viac ako $\frac{11}{70}$, teda viac ako Klára, čo nemôže.

Tým sme vyčerpali celý prípad, keď Oliver dostane $\frac{1}{5}$ bábovky, nenašli sme žiadne vyhovujúce krájanie.

- Napokon, ak by **Oliver dostal iba $\frac{1}{6}$ bábovky, alebo dokonca ešte menej**, Klára a strašidlo by spolu museli dostať aspoň $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$, teda Klára by musela mať aspoň $\frac{1}{6}$, čo nie je dovolené (Oliver má mať viac ako Klára).

Rozobrali sme všetky možnosti a našli pri tom **6 vyhovujúcich krájaní, ktoré sú uvedené v rámikoch**. Ukázali sme tým tiež to, že žiadna iná možnosť nevyhovuje.

Výsledky ankety o úlohách 3. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	2	12	2	4
najmenej sa páčila	2	0	9	7
najťažšia bola	2	2	8	6
najľahšia bola	12	3	2	0