JSMF Žilina, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Gymnázium Veľká Okružná Žilina

SEZAM, školský rok 2009/10, vzorové riešenia 3. zimnej série

Milí riešitelia,
vo svojej poštovej schránke ste si už určite našli nové strašidelné príhody prvej letnej série, o ktorých dúfame, že z nich nebudete mať strašidelné sny. Netreba však zabúdať na poslednú sériu zimnej časti. Ak ste sa celý polrok snažili, v obálke vás čaká aj pozvánka na zimné sústredenie SEZAMu. Uskutoční sa od 18. do 21. marca v Trenčianskom Jastrabí neďaleko od Trenčína. Môžete sa tešiť na kopec hier, športov, matematiky, nových kamarátov a mnoho iného (a ak ste sa nebodaj tešili na ploštice, musíme vás sklamať).

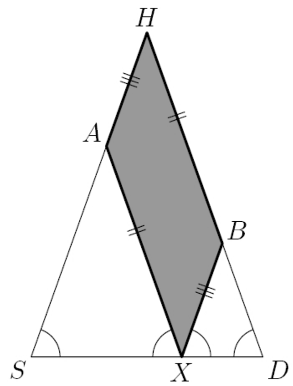
Okrem sústredenia sa nevieme dočkať ani vašich riešení prvej letnej série. Aby ste ich zvládli čo najlepšie, 10 z 10 vedúcich SEZAMu vám odporúča prečítať si tieto vzorové riešenia...

Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na `www.sezam.sk`.

Za všetkých organizátorov vám veľa úspechov a skoré jarné prázdniny želá Michal Prusák.

1. príklad *(opravoval Peťo Novotný)*

Ak si nakreslíme do jedného trojuholníka rôzne rovnobežníky (pre rôzne polohy bodu X) a zmeriame jednotlivé obvody, zistíme, že obvod vždy vychádza rovnako. To samozrejme ako zdôvodnenie nestačí, pretože meranie a rysovanie nemusí byť presné a okrem toho sme vyskúšali iba niekoľko možností a nemáme záruku, že pri ostatných to tak tiež vyjde. Máme však dobrý „tip“: vyzerá to tak, že trasa bude pre ľubovoľnú polohu bodu X vždy rovnako dlhá. To sa teraz pokúsime dokázať. Kvôli prehľadnosti budeme namiesto slov Skala, Dub a Hrad používať iba písmenká S, D, H.



Označme A bod, v ktorom duch so psom opustí rameno trojuholníka, a B bod, v ktorom sa na druhé rameno vráti (ako na obrázku). Všimnime si uhly, ktoré pri bode X zvierajú strany rovnobežníka so základňou SD. Keďže úsečky AX a HD sú rovnobežné, sú uhly SXA a SDH rovnako veľké (možno ste už počuli, že takéto uhly sa nazývajú *súhlasné*). Podobne aj uhly DXB a DSH sú rovnako veľké. Z toho, že trojuholník SDH je rovnoramenný, zasa máme, že uhly pri jeho základni, teda SDH a DSH, sú rovnako veľké. Spolu máme

$$|\sphericalangle SXA| = |\sphericalangle SDH| = |\sphericalangle DSH| = |\sphericalangle DXB|,$$

teda všetky uhly vyznačené na obrázku sú rovnako veľké. Z toho už je jasné, že oba trojuholníky SXA a XDH sú rovnoramenné (so základňami SX a XD). Teda $|AX| = |AS|$, $|BX| = |BD|$, a pre obvod celého rovnobežníka dostávame

$$o = |HA| + |AX| + |XB| + |BH| = |HA| + |AS| + |DB| + |BH| = |HS| + |DH|.$$

Inými slovami, úseky trasy nachádzajúce sa vnútri trojuholníka môžeme „preklopiť“ na rovnako dlhé úseky na ramenách. Teda bez ohľadu na to, kde leží bod X, **duch so psom musí prejsť vždy dĺžku, ktorá sa rovná súčtu dĺžok ramien pôvodného trojuholníka** (oproti pôvodnej trase ušetrí iba úsek od Skaly k Dubu).

2. príklad *(opravoval Miro Hudec)*

Označme si počty svetlušiek jednotlivých farieb prvými písmenami príslušných farieb, teda ako $\check{Z}$, Z, $\check{C}$ a M. Ich celkový počet si označme písmenom S ako spolu. Keď svietili všetky svetlušky okrem žltých, svietilo ich 42. To znamená, že platí vzťah $S - \check{Z} = 42$. Rovnakou úvahou dostávame aj nasledovné vzťahy: $S - Z = 40$ (oddychovali zelené svetlušky), $S - \check{C} = 38$ (svietili všetky svetlušky okrem červených) a $S - M = 36$ (oddychovali modré svetlušky). Z týchto štyroch vzťahov vyjadríme počty svetlušiek jednotlivých farieb takto:

$$\begin{aligned} S - \check{Z} = 42 &\quad\longrightarrow\quad \check{Z} = S - 42 \\ S - Z = 40 &\quad\longrightarrow\quad Z = S - 40 \\ S - \check{C} = 38 &\quad\longrightarrow\quad \check{C} = S - 38 \\ S - M = 36 &\quad\longrightarrow\quad M = S - 36 \end{aligned}$$

Tiež vieme, že tam boli iba svetlušky týchto štyroch farieb, preto

$$\check{Z} + Z + \check{C} + M = S.$$

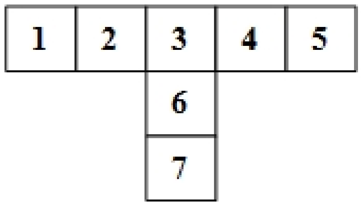
Do tohto vzťahu dosadíme predchádzajúce štyri, čím dostaneme

$$(S - 42) + (S - 40) + (S - 38) + (S - 36) = S.$$

Úpravami tejto rovnice sa ľahko vypočíta, že $S = 52$, teda **svetlušiek je dohromady 52**. Teraz už ostáva len vyjadriť počty svetlušiek jednotlivých farieb podľa predchádzajúcich vzťahov: $\check{Z} = 52 - 42 = 10$, $Z = 52 - 40 = 12$, $\check{C} = 52 - 38 = 14$ a $M = 52 - 36 = 16$. **V roji bolo 10 žltých, 12 zelených, 14 červených a 16 modrých svetlušiek.**

3. príklad

(opravovala Erika Trojáková)



Predtým, ako sa pustíme do počítania, pozrime sa na miestnosti. Vidíme, že miestnosti označené číslami 1, 5 a 7 majú iba jednu susednú miestnosť. Miestnosti 2, 4 a 6 majú po dve susedné miestnosti, napokon miestnosť 3 má až tri susedné miestnosti. Čiže ak by napríklad Andrea, ktorá je na začiatku v miestnosti 1, prešla do ktorejkoľvek z miestností 2, 3, 4, 6, tak by sa zmenil počet jej susedov z jedna na dva alebo tri. To sa podľa zadania nemôže stať. Teda Andrea môže byť iba v miestnostiach 1, 5 alebo 7, a podobne aj Rudolf a Veronika. Rovnako si môžu prestriedať miestnosti 2, 4, 6 deti Benjamín, Oliver a Simon (keďže majú po dvoch susedoch). A Dominika, ktorá je na začiatku v miestnosti 3 a má jediná troch susedov, musí celý čas ostať v trojke.

Teraz už vieme dosť na to, aby sme sa pustili do počítania možností. Prvá z otázok znie, koľkými spôsobmi sa môžu prestriedať deti Andrea, Rudolf a Veronika v troch miestnostiach 1, 5, 7. Skúsme najskôr umiestniť Andreu – na výber máme tri miestnosti. Podľa toho, do ktorej miestnosti Andreu dáme, ostane Rudolfovi na výber ešte z dvoch ďalších miestností. To znamená, že ku každému z troch umiestnení Andrei máme dve umiestnenia Rudolfa, čo je spolu $3 \cdot 2 = 6$ možností. Veronike už na výber žiadna miestnosť neostane, ak sme už predtým umiestnili Andreu a Rudolfa. Musí ísť jednoducho do tej miestnosti, čo ostala. Čiže **tieto tri deti vieme umiestniť šiestimi rôznymi spôsobmi do miestností 1, 5, 7**.

Podobne **vieme umiestniť Benjamína, Olivera a Simona do miestností 2, 4, 6 šiestimi rôznymi spôsobmi** (skúste si tieto možnosti nakresliť). Teraz si predstavme, že sme umiestnili nejakým konkrétnym spôsobom deti Andreu, Rudolfa a Veroniku v miestnostiach 1, 5 a 7. K tomuto rozmiestneniu môžeme vždy inak rozmiestniť deti Benjamína, Olivera a Simona (čo vieme šiestimi spôsobmi, ako sme vyššie vypočítali). Keďže rôznych rozmiestnení detí Andrei, Rudolfa a Veroniky v miestnostiach 1, 5 a 7 je šesť, a ku každému z nich vieme rozdeliť Benjamína, Olivera a Simona do miestností 2, 4, 6; máme spolu $6 \cdot 6 = 36$ možných rozmiestnení týchto šiestich detí (v miestnostiach 1, 2, 4, 5, 6 a 7). No a keďže Dominiku umiestňujeme vždy do stredu a nemá na výber, pri nej nám žiadna možnosť nepribudne (lebo je vždy v strede).

Deti by podľa Strašiducha mali ostať uväznené až 36 dní. Našťastie ich strašidlo oslobodilo skôr.

4. príklad

(opravoval Maťo Bachratý)

Mnohí ste túto úlohu riešili tak, že ste vytvorili niekoľko priebehov hry a potom sa snažili dokázať, že aj ostatné hry budú prebiehať rovnako alebo podobne. Možných priebehov hry je však v skutočnosti omnoho viac. Vypisovaním týchto priebehov ste si však viacerí všimli rôzne zaujímavosti, ktoré viedli k riešeniu.

Niektorí ste si všimli, že na začiatku je v hre spolu 34 dukátov. Každým kolom dva dukáty ubudli a jeden pribudol, čiže v konečnom dôsledku v jednom kole ubudne jeden dukát. Na konci má ostať len jeden dukát, muselo ich ubudnúť $34 - 1 = 33$, čo znamená, že **prebehlo 33 kôl**.

Teraz sa pozrime na dukáty niektorej z príšer, napríklad jednookej. Vieme, že prebehlo 33 kôl, preto je počet ubratí z jej kôpky a počet pridaní na jej kôpku rovný 33. V každom kole totiž strašidlo buď pridalo na jej kôpku dukát alebo z nej ubralo dukát. Ak by bola jednooká príšera tou, ktorá mala na konci jeden dukát, musí platiť, že

$$13 + \text{počet pridaní na jej kôpku} - \text{počet ubratí z jej kôpky} = 1$$

(poriadne si premyslite prečo). Keď k tomu pridáme podmienku, že počet pridaní a počet ubratí je spolu 33, dostaneme dve rovnice

$$P + U = 33 \quad \text{a} \quad 13 + P - U = 1,$$

kde P je počet pridaní a U počet ubratí. Z týchto rovníc dostávame, že $P = 10,5$ a $U = 22,5$; lenže počty pridaní a ubratí musia byť celé čísla. Preto **jednookej príšere nemohol ostať jeden dukát**. Rovnakým spôsobom pomocou takýchto rovníc sa dá zistiť, že **jednonohej príšere nemohol a jednorukej príšere mohol ostať jeden posledný dukát**.

Na záver riešenia bolo ešte potrebné napísať konkrétny priebeh hry, v ktorej ostane posledný dukát jednorukej príšere. **To, že pre zvyšné príšery to nejde a pre jednorukú môže ísť, ešte neznamená, že to pre ňu pôjde naisto** (úloha by nemusela mať riešenie).

Ukážeme si jeden možný spôsob, ktorým ostane posledný dukát jednorukej príšere. Na začiatku sú počty dukátov u príšer $(13, 9, 12)$ v poradí jednooká, jednonohá, jednoruká. Deväťkrát za sebou pridáme dukát jednookej príšere a uberieme zvyšným dvom príšerám, čím sa dostaneme k počtom $(22, 0, 3)$. Teraz pridáme jednonohej príšere: $(21, 1, 2)$, a znova pridáme jednookej príšere: $(22, 0, 1)$. Teraz 11-krát zopakujeme túto dvojicu kôl: pridáme jednookej príšere, uberieme zvyšným, pridáme jednorukej a uberieme zvyšným. Dostávame počty: $(21, 1, 0)$, $(20, 0, 1)$, $(19, 1, 0)$, $(18, 0, 1), \ldots,$ $(4, 0, 1)$, $(3, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Posledný dukát ostal naozaj jednorukej príšere. Zostrojenie podobného postupu pekne zvládla väčšina z vás.

Výsledky ankety o úlohách 3. série:

úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	6	15	2	1
najmenej sa páčila	3	0	5	18
najťažšia bola	6	1	2	14
najľahšia bola	4	13	7	3