SEZAM, školský rok 2010/11, vzorové riešenia 3. letnej série

Milí riešitelia,
príbeh Atosa aj vďaka vašej pomoci dopadol šťastne. Už teraz sa môžete tešiť na september, kedy do vašich poštových schránok zavíta prvá séria SEZAMu spolu s novými rozprávkovými hrdinami.
Dovtedy máte ešte dosť času, tak si poopravujte známky v škole (ak máte aké) a poriadne si užite letné prázdniny. Ak sa vám v SEZAMe darilo, tak ste si v obálke našli aj pozvánku na letný tábor pre najlepších riešiteľov. Čaká na vás desať augustových dní plných hier, zábavy, nových kamarátov a popri tom, ako inak, aj zaujímavej matematiky.
Aby ste však do septembra úplne nezabudli počítať, prečítajte si tieto vzorové riešenia. Možno sa vďaka nim naučíte niečo nové.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk
Za organizátorov vám pohodové leto a pekné prázdniny želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 *(opravoval Jurko Solcani)*

Predozadné čísla párnej dĺžky v napísanom 20-cifernom čísle (ďalej **danom čísle**) nenájdeme. Tie totiž musia mať v strede dve rovnaké cifry (tvar [...CBA**XX**ABC...]), a v danom čísle sa dve rovnaké cifry za sebou nenachádzajú. Hľadané čísla budú teda všetky nepárnej dĺžky.
Ľahko vidieť, že najkratšie predozadné čísla obsiahnuté v danom čísle budú trojciferné a sú to iba čísla **696** a **616**. Zároveň sa v strede každého ďalšieho hľadaného predozadného čísla musí nachádzať niektoré z nich. Predozadné číslo nepárnej dĺžky totiž musí mať tvar […CBA**XYX**ABC…] a čísla 696 a 616 sú jediné, ktoré majú tvar [XYX].
Pri hľadaní ďalších predozadných čísel budeme postupovať nasledovne. Uvažujme najprv číslo 696 a nájdime nejaký jeho výskyt v danom čísle, napríklad 169616961**696**16961696. K nemu pribalíme na začiatok a na koniec po jednej cifre z daného čísla. Dostávame: 16961696**16961**6961696. Ak by pribalené cifry neboli rovnaké, nové číslo by nebolo predozadné. Takto postupujeme ďalej. Celkovo dostaneme 9 predozadných čísel (podčiarknuté):

169616961**696**16961696
16961696**16961**6961696
1696169**6169616**961696
169616**961696169**61696
16961**69616961696**1696
1696**1696169616961**696
169**616961696169616**96
16**96169616961696169**6
1**6961696169616961696**

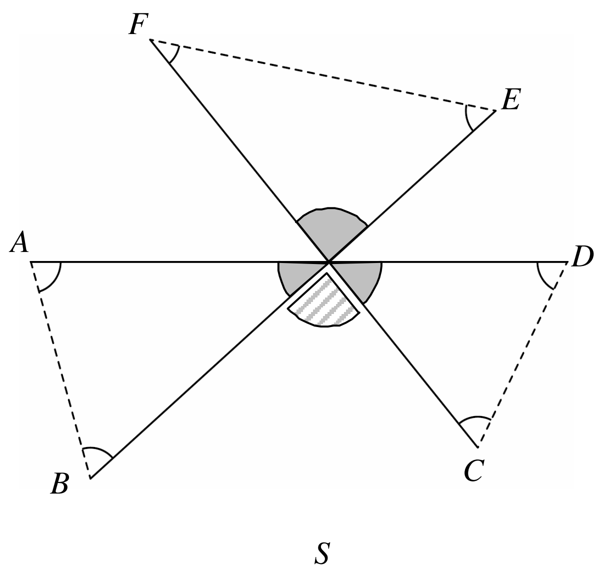
Ak by sme na začiatku zvolili iný výskyt čísla 696, dostávali by sme rovnaké predozadné čísla, pretože ďalšie výskyty trojice 696 sú posunuté o 4 a 8 cifier a vieme, že každé štvrté číslo v danom 20-cifernom čísle je rovnaké (tak bolo dané číslo zložené 1696 1696 1696 1696 1696). Tým, že sme výskyt čísla vybrali čo najviac v strede, sme boli schopný pribaľovať cifry z oboch strán súčasne čo najdlhšie.
Postupujme teraz rovnako s číslom 616. Získame tak nasledujúcich 8 predozadných čísiel (podčiarknuté):

1696169**616**9616961696
169616**96169**616961696
16961**6961696**16961696
1696**169616961**6961696
169**61696169616**961696
16**9616961696169**61696
1**696169616961696**1696
16961696169616961696

Popísaným postupom sme našli dohromady 17 predozadných čísiel v 20-cifernom čísle napísanom na šatke a na žiadne sme nezabudli. Dvoran si preto musí zo sebou zobrať 17 grošov.

Príklad č. 2 *(opravovala Erika Trojáková)*

Našou úlohou je zistiť súčet šiestich bielych uhlov vyznačených na obrázku. Môžeme si na začiatku pomôcť meraním a sčítaním na viacerých konkrétnych obrázkoch. Na základe takýchto meraní však iba zistíme, že súčet sa zdá byť 360°. No keďže meranie pomocou uhlomera nie je dokonale presné, tak sa môžeme vždy mýliť napríklad o nejakú stotinu stupňa. Preto správnu domnienku, že výsledok je naozaj 360°, musíme skúsiť ukázať aj nejako inak ako meraním.



Keď biele uhly doplníme o tie, ktoré sú na obrázku vyplnené sivou farbou, vieme povedať, že súčet veľkostí týchto deviatich uhlov je rovný súčtu uhlov v troch trojuholníkoch *ABS*, *CDS* a *EFS*, teda $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Aby sme ukázali, že súčet bielych uhlov je 360°, stačí nám teraz ukázať, že súčet sivých je 180°. Potom bude súčet bielych rovný $540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$.
Vieme, že sivý uhol *FSE* je rovnako veľký ako šrafovaný uhol *BSC*, keďže sú to vrcholové uhly (čiary *BE* a *CF* sú priamky). Teda súčet troch sivých uhlov je rovnaký ako súčet troch uhlov *ASB*, *BSC* a *CSD* pri vrchole *S*, čo je

180^o, lebo bod *S* leží na priamke *AD*. Teda sme ukázali to, čo sme chceli, a kôň sa pri preteku otočí o 360^o.

Príklad č. 3 *(opravovala Kamila Štyráková)*

Rytieri sa snažili nastrieľať priemernú hodnotu 17 bodov. Nevieme teraz presne, koľkokrát trafili ktorú hodnotu na terči. Preto si tento počet označíme:
hodnotu 6 trafili *a* krát, hodnotu 12 trafili *b* krát a hodnotu 30 trafili *c* krát.
Priemer vypočítame ako podiel nastrieľanej hodnoty a počtu všetkých vystrelených šípov
(tých bolo a + b + c):
(6·a + 12·b + 30·c)/(a + b + c) = 17
Rovnicu ďalej môžeme upraviť takto:
(6·a + 6·2·b + 5·c)/(a + b + c) = 17
6·(a + 2·b + 5·c) = 17·(a + b + c)
Vidíme, že na ľavej strane máme šesť násobok čísla (a + 2·b + 5·c). Teda ľavá strana je deliteľná šiestimi bezo zvyšku. Teda aj výraz na pravej strane je deliteľný šiestimi bezo zvyšku.
To vlastne znamená, že je deliteľný bezo zvyšku zároveň dvojkou aj trojkou. Keďže ani dvojka ani trojka nedelia číslo 17, ale pritom delia 17·(a + b + c), tak musia obe deliť číslo (a + b +c), čo je vlastne počet všetkých striel. Teda sme zistili, že celkový počet striel každého súťažiaceho musí byť deliteľný šiestimi, aby priemerná hodnota mohla byť 17.
Najmenšie číslo deliteľné šiestimi (okrem nuly) je 6, najväčšie také číslo, ktoré je však menšie ako 40 je 36.
Skúsme nájsť šesť takých výstrelov, aby ich priemerná hodnota bola 17. Súčet zasiahnutých hodnôt potom bude počet výstrelov krát priemerná hodnota výstrelu, teda 6 · 17 = 102.
Teraz sa stačí trošku pohrať s číslami. Hneď zbadáme, že jeden 30 bodový zásah pri 6 výstreloch nestačí (získali by sme najviac 5 · 12 + 30 = 90 bodov, čo nestačí). Keď máme dva 30 bodové zásahy, stačí ich doplniť tromi 12 bodovými a jedným 6 bodovým a vidíme, že 6 + 3 · 12 + 30 · 2 = 102 bodov a 1 + 3 + 2 = 6 výstrelov. Teda priemerná hodnota výstrelu bude 102 : 6 = 17.
Určiť, ako má rytier strieľať aby strelil priemernú hodnotu 17 s 36 šípmi, je už jednoduché.
36 = 6 · 6 a preto stačí počty hodnôt pri šiestich výstreloch prenásobiť šiestimi, teda
a = 6 · 1 = 6, b = 6 · 3 = 18 a c = 6 · 2 = 12. Môžete si sami skúsiť, že priemerná hodnota zásahu je v tomto prípade tiež 17.
Zistili sme teda, že existuje možnosť, ako nastrieľať priemernú hodnotu 17 so 6 aj s 36 šípmi. Môžeme teda s istotou povedať, že najmenší počet striel mohol byť 6 a najväčší mohol byť 36.

Príklad č. 4 *(opravovala Jana Fraasová)*

Naozaj všetci ste bez problémov prišli na to, že **Portos si pieseň vyberal najčastejšie**. Dokonca sa táto skutočnosť potvrdila aj u väčšiny tých z vás, čo ste si kockami naozaj zahádzali, za čo vás chcem veľmi pochváliť. Môžeme preto povedať, že Portos vyberal pieseň najčastejšie s takmer 100% istotou. Náhoda ale môže spôsobiť, že to dopadne niekedy aj inak.
Ako môžu kocky vlastne padať:
<u>(1,1)</u> <u>(1,2)</u> <u>(1,3)</u> <u>(1,4)</u> <u>(1,5)</u> <u>(1,6)</u>
<u>(2,1)</u> (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
<u>(3,1)</u> (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)
<u>(4,1)</u> (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)
<u>(5,1)</u> (5,2) (5,3) (5,4) **(5,5)** **(5,6)**
<u>(6,1)</u> (6,2) (6,3) (6,4) **(6,5)** *(6,6)*
Podčiarknuté sú situácie, keď vyberal pieseň Portos, čiže keď aspoň na jednej kocke padla 1, hrubo sú situácie, keď vyberal Július, čiže číslo 5 a kurzívou (šikmým písmom) je jediná situácia, ktorá dovolila vyberať D'Artagnanovi. Z tabuľky už vidíme, že **Július mohol vyberať pieseň asi 3-krát častejšie ako D'Artagnan**.
Slovo „náhoda", „asi", „pravdepodobne" spomenul vo svojom riešení málokto z vás. Tí, čo si túto skutočnosť uvedomili majú u mňa veľkú pochvalu.

Výsledky ankety o úlohách 3. série:

Úloha č.	1	2	3	4
najviac sa páčila	2	7	2	7
najmenej sa páčila	3	2	7	4
najťažšia bola	0	3	12	1
najľahšia bola	9	4	0	4