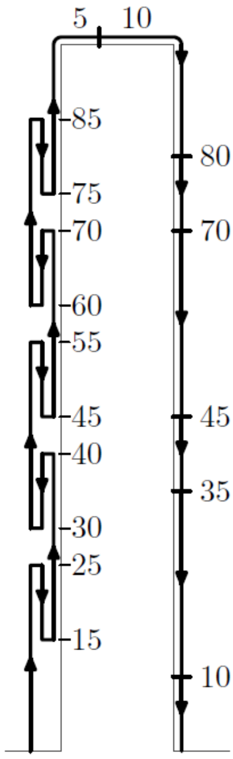
JSMF Žilina, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Gymnázium Veľká Okružná Žilina

SEZAM, školský rok 2011/12, vzorové riešenia 3. letnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou sa skončila aj letná časť tohtoročného SEZAMu. Príbeh kapitána Jeana a jeho lode sa skončil dobre: vesmír je zachránený a nehrozí mu zánik v obrovskej čiernej diere.
Aj preto sa budeme môcť **od 12. do 21. augusta** stretnúť v letnom tábore vo Fačkovskom sedle.
Skôr, ako začnete vypĺňať návratku, si ale ešte pozrite vzorové riešenia týchto úloh. Určite v nich objavíte nápady, ktoré využijete vo svojej matematickej budúcnosti...

Za organizátorov sa na augustové stretnutie teší Hynek Bachratý.

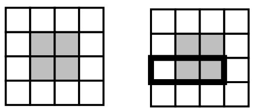
Príklad č. 1 (opravoval Peťo Novotný)



Aby sme sa nepomýlili, preskúmame pohyb slimáka detailne po jednotlivých dňoch. Pomôžeme si pri tom vhodným obrázkom.
1. deň vylezie cez deň 25 cm a v noci sa zošmykne o 10 cm, takže druhý deň začína vo výške 15 cm.
2. deň sa dostane cez deň na 15 + 25 = 40 cm a v noci klesne na 30 cm.
3. deň: cez deň vylezie na 30 + 25 = 55 cm, v noci klesne na 45 cm.
4. deň: cez deň vylezie na 45 + 25 = 70 cm, v noci klesne na 60 cm.
5. deň: cez deň vylezie na 60 + 25 = 85 cm, v noci klesne na 75 cm.
Keďže v tomto momente slimákovi chýba po vrch pultíka už len 20 cm, cez 6. deň ich prelezie a zvyšných 5 cm (keďže za deň má preliezť až 25 cm) lezie už po vrchu pultíka. V noci sa teda nezošmykne – nenachádza sa na zvislej ploche.
7. deň prelezie zostávajúcich 10 cm po vrchu pultíka a ešte 15 cm smerom dole z pultíka – do výšky 80 cm nad zemou. V noci vplyvom gravitácie klesne na 70 cm.
8. deň: cez deň zlezie na 70 − 25 = 45 cm, v noci klesne na 35 cm.
9. deň: cez deň zlezie na 35 − 25 = 10 cm, v noci klesne na 0 cm.
Slimák teda preliezal pultík presne 9 dní – začal prvý deň ráno a skončil 10. deň ráno.

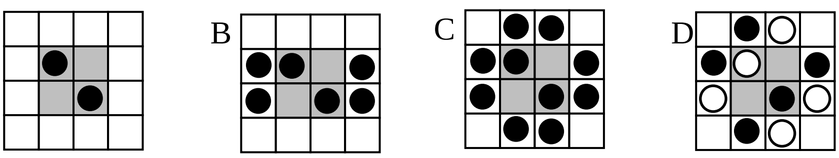
Častou chybou bolo, že ste najskôr spočítali, že keď slimák lezie smerom hore, tak cez deň vylezie 25 cm a v noci klesne o 10 cm, čiže vlastne za deň sa posunie o 15 cm. Takže po šiestich dňoch bude vo výške 6 · 15 = 90 cm. V skutočnosti však počas 6. dňa slimák už prelezie cez okraj pultíka, a teda 6. noc neklesne späť na 90 cm.

Príklad č. 2 (opravovala Erika Novotná)



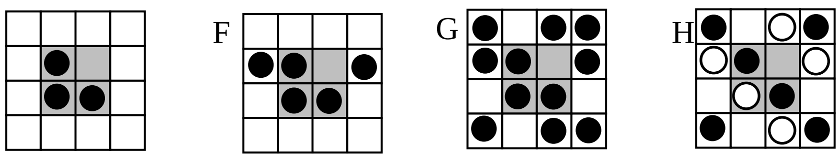
Skúsme naše úvahy odvíjať od toho, koľko stromov zasadíme do stredných štyroch parciel, vyznačených na obrázku sivou. Uvedomme si ešte predtým ako sa pustíme do rozoberania možností, že v každých troch susedných parcelách musia byť práve dva stromy – jedna jabloň a jedna hruška.
1. Ak by sme do sivej časti nezasadili ani jeden strom, nenájdeme riešenie, lebo napr. v parcele vyznačenej rámikom by potom mohol byť najviac jeden strom.
2. Do podobnej situácia by sme sa dostali, ak by sme do sivej časti nasadili iba jeden strom.
3. Ak by sme do sivej časti, nasadili práve dva stromy do riadku alebo do stĺpca, dostaneme sa do podobnej situácie ako v predchádzajúcich dvoch možnostiach. Teda museli by sme tie dva stromy nasadiť do uhlopriečky, tak ako na obrázku A. Keď potom chceme dodržať pravidlo o počte stromov v riadkoch, musíme tam dosadiť stromy tak, ako vidíte na obrázku B. Ak sa potom pozrieme na stĺpce, treba tam dosadiť stromy tak, ako vidíte na obrázku C. Na obrázku C vidíme, že v každých susedných troch parcelách sú dva stromy. Keď sa teraz rozhodeneme, že napríklad prvý v prvom riadku je hruška ●, tak potom už vieme jednoznačne preznačiť zvyšné krúžky na jablone ○ tak, aby platilo zadanie. Teda za predpokladu, že na začiatku zasadíme stromy tak, ako vidíte na obrázku A, treba do záhrady potom celkovo nasadiť 5 jabloní a 5 hrušiek – teda dokopy 10 stromov.

A B C D



4. Ak by sme do sivej časti nasadili tri stromy, tak na základe rovnakého postupu ako v predchádzajúcom bode získame riešenie ako vidíte na obrázku H až s jedenástimi stromami.

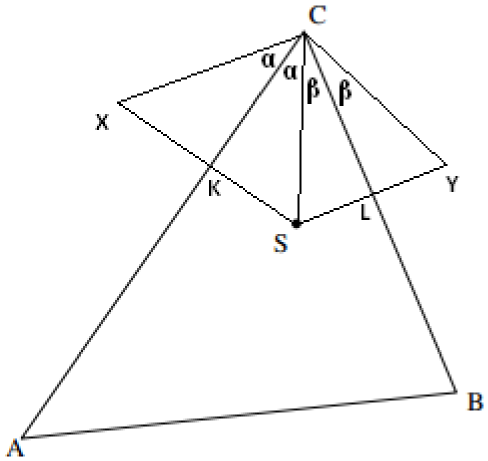
E F G H



5. Ako poslednú treba rozobrať možnosť, že do stredných políčok nasadíme až štyri stromi. Skúste sami ukázať, že táto možnosť nevedie k riešeniu.

Teda do záhrady stačí zasadiť iba 10 stromov tak, ako vidíme na obrázku D.

Príklad č. 3 (*opravoval Miro Hudec*)



Pozrime sa bližšie na obrázok. Z konštrukcie bodu X vyplýva, že |KX| = |KS| a uhly CKX a CKS sú pravé. Podľa vetu sus sú teda trojuholníky CKX a CKS zhodné (stranu KC majú spoločnú a teda zhodnú). Z rovnakých dôvodov sú zhodné aj trojuholníky CLY a CLS. Z týchto informácií viete potom, že |CX| = |CS| = |CY| a teda trojuholník CXY je rovnoramenný so základňou XY. V rovnoramennom trojuholníku sú vrcholy pri základni zhodné a teda veľkosť uhla XYC je 25°. Súčet uhlov v trojuholníku je 180° a teda veľkosť uhla XCY je 180 - 25 - 25 = 130°. Pozrime sa teraz bližšie na uhol XCY. Ten je na obrázku tvorený 4 uhlami zo 4 trojuholníkov. Keďže dva a dva z týchto trojuholníkov sú zhodné (to sme ukázali na začiatku), tak aj dva a dva z tých uhlov budú zhodné. Môžeme teda zapísať, že $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 130°$, čo môžeme zjednodušiť na $\alpha + \beta = 65°$. A α a β tvoria dokopy uhol ACB, ako možno vidieť na obrázku. Takto sme teda určili všetky uhly týkajúce sa čiernej diery.

Príklad č. 4 (*opravoval Hynek Bachratý*)

Kód pre naštartovanie čiernej diery a zničenie vesmíru našťastie neexistuje. Nájsť 6 čísel, vyhovujúcich podmienkam zadania o ich deliteľnosti nie je totiž možné. Najjednoduchšie to ukážeme pomocou úvahy o deliteľnosti dvojkou, trojkou a šestkou. Platí totiž, že ak je číslo deliteľné dvomi a tromi súčasne, je súčasne násobkom 2 aj 3. A keďže 2 a 3 sú nesúdeliteľné čísla, je potom aj násobkom 6. Teda je deliteľné šestkou. Neexistencia kódu potom vyplýva z toho, že v ňom má byť príliš veľa čísel deliteľných 2 a deliteľných 3, a zároveň len jediné má byť deliteľné 6. Presne sa to dá ukázať viacerými spôsobmi, táto úvaha z vašich riešení sa mi zdala najkrajšia:
Zo šiestich čísle kódu je 5 deliteľných dvomi, teda párnych. Zo 4 čísel deliteľných tromi potom aspoň 3 musia byť medzi týmito párnymi (najviac jedno môže byť zvyšné nepárne). Tieto najmenej tri čísla sú potom ale deliteľné dvomi aj tromi, a teda aj šiestimi. To ale odporuje podmienke, že v kóde je presne jedno číslo deliteľné šiestimi.

Výsledky ankety o úlohách 2. série:

Úloha č.	**1**	**2**	**3**	**4**
najviac sa páčila	16	8	0	2
najmenej sa páčila	0	0	24	2
najťažšia bola	0	0	22	4
najľahšia bola	14	8	0	6