JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

SEZAM, školský rok 2012/13, vzorové riešenia 1. letnej série

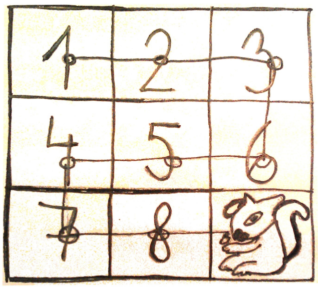
Milí riešitelia,
dostali sa k vám zadania druhej letnej série tohtoročného SEZAMu. Zvieratká, ktoré sa pomaly lúčia s posledným snehom sa veľmi potešili všetkým Vaším riešeniam. S niektorými sme sa aj stretli v Patroveckých lesoch na sústredení. Pozdravujú Vás a dúfajú, že im pomôžete aj s ich ďalšími problémami.
Ak si chcete predtým než sa do nich pustíte potrénovať svoje matematické bunky, tak si určite prečítajte tieto vzorové riešenia.
Ešte vás chceme poprosiť, aby ste poctivo vypĺňali celú hlavičku na každé jedno riešenie. Značne nám to pomôže pri organizácii.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na vynovenej stránke www.sezam.sk

Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravoval Didi Hudec*)

Hľadáme dve sedemciferné čísla, v ktorých sa cifry nesmú opakovať a spolu dávajú súčet 11001000. Začnime teda od konca – od miesta jednotiek. V optimistickom čísle tam musí byť cifra aspoň 7 a v pesimistickom najviac 3, inak by sa nám nepodarilo vytvoriť sedemciferné čísla, lebo by sme nemali dostatok cifier. Spolu musia dať súčet s 0 na konci. Skúsime si teda dať na **miesta jednotiek** cifry **9 a 1**. Zo súčtu jednotiek nám teda zvýšila 1. Na mieste desiatok má byť v súčte 0, preto k jednotke musíme pridať ešte ďalších 9. Na **mieste desiatok** teda môže byť buď dvojica 7 a 2 (7 + 2 = 9) alebo dvojica 6 a 3 (6 + 3 = 9). Ostatné dvojice nevyhovujú, lebo by nám opäť chýbali cifry na dokončenie sedemciferného čísla. Vyberme si možnosť **7 a 2** a týmto spôsobom pokračujme v hľadaní:
Na **mieste stoviek** chceme opäť súčet 9 (jedna sa nám preniesla), máme možnosti 6+3 a 5+4. Vyberme si **6 a 3**.
Na **mieste tisícok** chceme súčet jedna, a jedna nám aj ostala. Cifry sa teda musia nasčítať do nuly alebo desiatky. Nula však nevyhovuje, pokazili by sme tým pesimistické číslo. Máme teda možnosti 5+5 a 4+6, vyberme si **5 a 5**.
Na **mieste desať tisícok** – ostáva už iba **3+6**, na **mieste sto tisícok** – ostáva iba možnosť **2+7** a na **mieste miliónov** – ostáva **1+9**.
Našli sme teda optimistické číslo 1235679 a pesimistické 9765321, ktoré v súčte naozaj dávajú 11001000. Úlohou bolo nájsť aspoň jednu takúto dvojicu, a teda sme úlohu splnili. Tí, ktorí ale preberali všetky možnosti poriadne vedia, že žiadna iná možnosť už nevyšla.

Príklad č. 2 (*opravovala Denisa Múthová*)



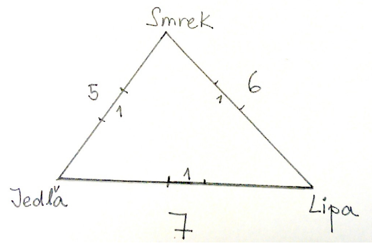
Najskôr si zhrnieme ako sa veverička môže pohybovať na mriežke. Postaví sa povedzme na štvorec s číslom 1 a začne skákať. Môže skočiť len na susedný štvorec (to je taký, čo susedí stranou), v tomto prípade na 2 alebo 4. Hra skončí, keď veverička prejde všetky štvorce (každý z nich musí prejsť práve raz).Našou úlohou je zistiť, koľkými rôznymi spôsobmi ak postupne štartujeme s **každého** štvorca (nie iba z 1) preskáčeme celú mriežku.
Začneme so štvorcom **1** (je to rohový štvorec). Môžeme pokračovať na 2 alebo 4. Vyberieme si najskôr **2** a z nej môžeme ísť na 3 alebo 5. Vyberieme si napríklad **3**, pokračovať musíme na **6**, a z nej buď na 5 alebo 9. Vyberieme si **5** a z nej môžeme ísť len na **4** lebo ak by sme išli na 8, tak sa už nevieme prejsť celú mriežku (z 8 by sme mohli ísť buď na 7 alebo 9 ale ak by sme si vybrali 7, tak by sme sa nevedeli vrátiť na 9, ak by sme si vybrali 9, tak by sme sa zase nevedeli vrátiť na 7). Zo 4 musíme ísť na **7** a z nej na **8** a potom na koniec na **9**. Naša prvá cesta vyzerá **1-2-3-6-5-4-7-8-9**. Všetky možnosti budú vyzerať: 1-2-3-6-5-4-7-8-9, 1-2-3-6-9-8-5-4-7, 1-2-3-6-9-8-7-4-5, 1-4-7-8-9-6-3-2-5,1-4-5-2-3-6-9-8-7,1-4-7-8-5-2-3-6-9,1-4-7-8-9-6-3-2-5, 1-4-7-8-9-6-5-2-3 , dokopy máme teda **8 možností**, ak začíname **štvorcom 1**.
Ak by sme si mriežku pootočili , všimneme si, že pre štvorce 3,7,9 platí tá istá mriežka ako pre 1, len čísla budú v inom poradí, teda aj štvorce číslo 3, 9 a 7 majú po 8 možností. **Rohové štvorce nám teda dajú 32 možností**.

Začnime teraz štvorcom 2. Môžeme ísť na 1, 5 alebo 3. Ak pôjdeme na 5, tak potom skočíme buď na 4, 6 alebo 8, ale zakaždým nám ostanú políčka, na ktoré nebude mať ako skočiť: ak pôjdeme 2-5-4-7, tak sa už nikdy nedostaneme na 1; ak pôjdeme 2-5-6-9, tak sa nedostaneme na 3; ak pôjdeme 2-5-8-9, tak sa nedostaneme na 7; ak pôjdeme 2-5-8-7, tak sa nedostaneme na 9.
Vyskúšajte si, že ak by ste začali v štvorci 2 a pokračovali by ste či už do štvorca 1 alebo 3, tak opäť neviete prejsť cez všetky políčka. To znamená, že ak skáčeme zo štvorca 2, tak nevieme prejsť všetky políčka. Znovu, ak si mriežku pootočíme, tak vidíme, že štvorce 6,8 a 4 majú tie isté vlastnosti ako štvorec 2. Teda ani z nich nevieme prejsť všetky políčka.

8	**0**	**8**
0	**8**	**0**
8	**0**	**8**

Posledný nám ostáva štvorec **5**. Z neho sa dá skočiť na štvorec 2, 4, 6 alebo 8. Skočíme napríklad na **2**. Z neho vieme ísť na štvorec 1 alebo 3, vyberme si 3 a potom sa už len točíme v „špirále". **Celkovo je možností 8**: 5-2-3-6-9-8-7-4-1, 5-2-1-4-7-8-9-6-3, 5-4-1-2-3-6-9-8-7, 5-4-7-8-9-6-3-2-1, 5-6-3-2-1-4-7-8-9, 5-6-9-8-7-4-1-2-3, 5-8-9-6-3-2-1-4-7, 5-8-7-4-1-2-3-6-9. ***Počet možností z každého políčka teda vidíte v tabuľke, všetkých riešení je teda 32+8=40.***

Príklad č. 3 (opravovali Aďa Santrová a Betka Bohiníková)



Označme si vzdialenosť dverí od smreku *S*, od jedle *J* a od lipy *P*. Vieme, že dvere sú široké 1 m. Napíšme si teraz čo vieme zo zadania: ***S + J + 1 = 5** , **S + L + 1 = 6** , **L + J + 1 = 7***

Vyjadrime si z prvých dvoch rovností *S*. Dostávame ***S = 4 – J** a **S = 5 – L**,* čo vieme upraviť na ***4 – J = 5 - L***

a ďalšou úpravou dostávame ***1 + J = L**.*

Vyjadrime si teraz *L* z tretej rovnosti ***L = 6 – J** .* Pomocou týchto dvoch vyjadrení *L* dostávame ***1 + J = L = 6 - J*** a ďalšou úpravou zistíme že ***J = 2,5**.* Teraz to už iba stačí dosadiť do prvej a tretej rovnosti a dostaneme aj *S* a *L*.

S + 2,5 + 1 = 5 => S = 1,5** a **L + 2,5 + 1 = 7 => L=3,5

Dvere je potrebné umiestniť 1,5 metra od smreku, 2,5 metra od jedle a 3,5 metra od lipy.

Príklad č. 4 (opravoval Hynek Bachratý)

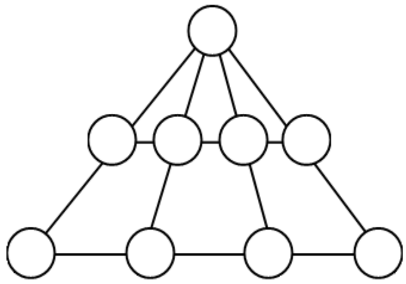
Vyjdeme z toho, čo líšky medveďom naozaj povedali. Líška vľavo povedala „Som Eliška". Ak je to naozaj Eliška, povedala pravdu. Zároveň líška napravo potom musí byť Maryška, a keďže tvrdí „Som Maryška", aj ona hovorí pravdu. Mohlo sa niečo takéto stať? Mohlo, ale jedine v nedeľu. Iba vtedy obe hovoria pravdu a teda aj vieme, ktorá je ktorá.

Druhá možnosť je, že líška vľavo je Maryška. Potom keď hovorí „Som Eliška" klamale. Zároveň vpravo môže byť len Eliška, ale potom aj ona klame keď hovorí „Som Maryška". Môže sa ale stať, že obe líšku naraz povedali nepravdu? Nemôže, taký deň v týždni nie je.

Jediná možnosť, kedy sa príhoda mohla udiať tak ako je napísane je teda nedeľa, líšky hovorili pravdu, vľavo je Eliška a vpravo Maryška.

Veľa z Vás poslalo veľmi podobné riešenie, ktoré ale nie je úplne správne a bolo za neho 4,5 boda. Jeho podstatou bolo, že líška, povedzme Maryška, keď klame, povie „Som Eliška". Na základe toho ste tvrdili, že v iné dni ako nedeľu by obe líšky povedali rovnaké mená, čo sa nestalo atď. To ale nemusí byť pravda. Na otázku ako sa volajú môžu aj utiecť do lesa, Maryška môže zaklamať „Som Terezka", alebo sa bude tváriť hlúpo a zaklame „Mám rada palacinky"... Povedať čo sa **muselo** stať v pondelok (a na základe toho tvrdiť, že je iný deň) nevieme. Vieme len, čo sa naozaj stalo, a musíme vysvetliť, že **toto** sa mohlo stať jedine v nedeľu.

Príklad č. 5 (opravoval Kubo Santer)



Vašou úlohou bolo rozmiestniť do deviatich komôrok postupne 1, 2, 3, ... až 9 zrniečok ryže tak, aby bolo vo všetkých vodorovných a aj zvislých (šikmých) chodbách v súčte 18 zrniečok.

Väčšina z vás prišla na to, že v najvrchnejšej komôrke musí byť 9 zrniečok ryže. A je to skutočne tak. V prvej aj v druhej vodorovnej chodbe je 18 zrniečok, a teda v oboch dokopy je 18 + 18 = 36 zrniečok. Keďže máme do všetkých komôrok prerozdeliť 1 + 2 + 3 + ... + 8 + 9 = 45 zrniečok, tak v hornej komôrke musí byť 45 – 36 = **9** zrniečok ryže.

Vieme, že v každej zvislej chodbe je 18 zrniečok. Keďže do každej z týchto chodieb patrí horná komôrka (s deviatimi zrniečkami ryže), tak vo zvyšných dvoch komôrkach každej chodby musíme mať dokopy 18 – 9 = 9 zrniečok.

To ale znamená, že čísla 1, 2, 3, ... 7 , 8 musíme rozdeliť do štyroch dvojíc tak, aby súčet každej dvojice bol 9. Ľahko zistíme, že číslo 1 musí byť v dvojici s číslom 8, číslo 2 s číslom 7, číslo 3 s číslom 6 a nakoniec číslo 4 s číslom 5 (skúste sa zamyslieť nad tým, prečo to nemôže byť inak).

Teraz, keď už v každej zo zvislých chodieb máme v súčte 18 zrniečok ryže, musíme rovnaké súčty dosiahnuť aj vo vodorovných chodbách. To inak znamená, že v každej z dvojíc 1-8, 2-7, 3-6 a 4-5 musíme určiť číslo, ktoré bude v prvej vodorovnej chodbe. Druhé z dvojice bude automaticky v druhej vodorovnej chodbe. Poďme sa teda pozrieť na to, ako to asi môže v týchto chodbách vyzerať.

Zoberme si dvojicu 1-8 a povedzme si, že číslo 8 je v hornej vodorovnej chodbe. Tým pádom bude 1 v dolnej vodorovnej chodbe. Zoberme si teraz dvojicu 2-7. Môže byť číslo 7 v hornej vodorovnej chodbe? Ak by tam bolo, tak spolu so 7 dá súčet 7 + 8 = 15. To by ale znamenalo, že vo zvyšných dvoch komôrkach hornej chodby musia byť dokopy 3 zrniečka ryže. Jediná možnosť, ako to vieme dosiahnuť, je dať tam 1 a 2 zrniečka. Ale 1 zrniečko je už v dolnej vodorovnej chodbe. Číslo 7 teda musí byť dole, číslo 2 hore.

Pozrime sa na ďalšiu dvojicu t. j. 3-6. Môže byť číslo 6 v hornej vodorovnej chodbe s číslami 8 a 2? Uvažujme podobne ako v predchádzajúcom prípade. Ak by tam číslo 6 bolo, tak 8 + 2 + 6 = 16. Teda štvrté číslo by muselo byť 18 – 16 = 2, čo teda očividne možné nie je, keďže každé číslo použijeme práve raz. A tak do hornej chodby pribudne číslo 3 a do dolnej chodby číslo 6. Nakoniec už vieme jednoznačne určiť, že z dvojice 4-5 bude v hore číslo 5 a dole číslo 4. Hore teda budú čísla 8, 2, 3 a 5 a dole čísla 1, 7, 6 a 4.

Premyslite si, že ak by sme dali číslo 8 do dolnej chodby, tak z rovnakých dôvodov budú v dolnej chodbe čísla 8, 2, 3 a 5 a v hornej chodbe čísla 1, 7, 6 a 4.

Výborne! Takže sme zistili, že vo zvislých chodbách sú spolu vždy dvojice **1-8**, **2-7**, **3-6** a **4-5** a vo vodorovných chodbách sú to vždy štvorice **8-2-3-5** a **1-7-6-4** (čísla v nich nemusia byť práve v tomto poradí).

Navyše, ak splníme tieto dve podmienky, tak už určite platí, že všetky súčty sú 18.

Z tohto už vieme celkom jednoducho vypočítať počet rôznych rozmiestnení zrniečok. Treba si uvedomiť, že vlastne len chceme nájsť počet rôznych usporiadaní štyroch stĺpčekov a dvoch riadkov. Stĺpčeky vieme usporiadať 4 · 3 · 2 · 1 = 24 spôsobmi (na prvé miesto vieme dať 4 stĺpčeky, na druhé miesto už len 3 stĺpčeky, ...). A keďže čísla 8-2-3-5 môžu byť buď hore alebo dole, tak ***dokopy existuje 2 · 24 = 48 spôsobov rozmiestnenia zrniečok do komôrok podľa zadania.***

Príklad č. 6 (*opravoval Janči Jakubík*)

Pri opravovaní tejto úlohy sme sa znovu presvedčili, že najlepšie riešeniu rozumejú tí riešitelia, ktorí si hru naozaj zahrali. Veľmi Vás musíme pochváliť aj za spôsoby, akými ste náhodnú hru zvieratiek v lese simulovali vo vašich domácich podmienkach.

Napriek tomu, že ste pri vašich simuláciách nedostali rovnaké výsledky, vaše experimentálne výsledky sa podobali na teoretické výsledky. Viacerí z Vás ste prišli na to, aké by mali byť teoretické výsledky, hoci je jasné, že, že 30 pokusov pri každej hre je málo na to aby sme pomocou experimentu dostali presnú pravdepodobnosť. Pri prvej hre vyberáme náhodne jednu zo 6 paličiek. Oriešky dostaneme, ak vytiahneme práve jednu paličku s 3 zárezmi. Medzi šiestimi paličkami máme dve takéto paličky. Teda pravdepodobnosť, že vytiahneme paličku s tromi zárezmi je 2 zo šiestich, teda 1/3, teda asi 0,33.

Pri druhej hre vyberáme náhodne dve zo 6 paličiek Nech sa paličky s dvoma zárezmi volajú jedna a, druhá b.
S tromi zárezmi c, d. So štyrmi zárezmi e, f. Teraz budeme vyťahovať dvojice paličiek. Poďme zistiť koľko takých rôznych dvojíc paličiek vieme vytiahnuť.

Vypíšme si všetky možnosti ako vieme vytiahnuť paličky:

ab	ba	ca	da	**ea**	**fa**
ac	bc	cb	db	**eb**	**fb**
ad	bd	**cd**	**dc**	ec	fc
ae	**be**	ce	de	ed	fd
af	**bf**	cf	df	ef	fe

<u>Dvojíc je teda 30.</u>

Hrubo vyznačené dvojice paličiek sú dvojice paličiek, ktorých súčet zárezov je 6.

Z toho vieme usúdiť, že počet všetkých možností je 30 a z toho je 10 možností takých, ktorých súčet zárezov je 6. Teda pravdepodobnosť, že vytiahneme dve paličky, ktorých súčet zárezov je 6 je 10 z 30, teda opäť 1/3, teda asi 0,33.

Pri tretej hre budeme postupovať rovnako ako pri druhej hre. Zistíme počet všetkých možností ako vytiahnuť 3 paličky a potom zistíme počet možností, ktorých súčet zárezov je 9. Nech sa aj teraz paličky s dvoma zárezmi volajú a, b. S tromi zárezmi c, d. So štyrmi zárezmi e, f.

Spôsobov ako zistiť počet neopakujúcich sa možností je viacero, ja si zvolím vypísanie všetkých možností (snáď ich nebude veľa ☺):

abc abd abe abf acb acd **ace acf** adb adc **ade adf** aeb **aec aed aef** afb **afc** afd afe
bac bad bae baf bca bcd **bce bcf** bda bdc **bde bdf** bea **bec bed** bef bfa **bfc bfd** bfe
cab cad **cae caf** cba cbd **cbe cbf** cda cdb cde cdf **cea ceb** ced cef **cfa cfb** cfd cfe
dab dac **dae** daf dba dbc **dbe dbf** dca dcb dce dcf **dea deb** dec **def** dfa **dfb** dfc **dfe**
eab **eac ead** eaf eba **ebc ebd** ebf **eca ecb** ecd ecf **eda edb** edc edf efa efb efc efd
fab **fac fad** fae fba **fbc fbd** fbe **fca fcb** fcd fce **fda fdb** fdc fde fea feb fec fed

(Existujú aj lepšie spôsoby, ako vypisovať možnosti a zistiť pravdepodobnosť, my sme vybrali pracnejší postup, nech si vy sami môžete nabudúce vymyslieť pre seba rôzne zjednodušenia.)

Všetkých možností je 120. Počet možností takých trojíc paličiek (hrubo vyznačených), ktorých súčet zárezov je 9, je 48. Pravdepodobnosť, že vytiahneme tri paličky, ktorých súčet zárezov je 9, je 48 zo 120, čo je 0,4.

Ak by sme mali odpovedať na otázku v zadaní, v ktorej hre vyhrávali zvieratká najčastejšie, bolo by to, že pravdepodobne v tretej hre. Nie je to však vždy zaručené, je to len viac pravdepodobné. Prvé dve hry sú z hľadiska počtu, koľko krát sa v nich vyhráva, rovnocenné. Ale inak je to, keby sme počítali, koľko dostanú zvieratká orieškov. Vtedy je jedna z hier výnosnejšia. Viete ktorá?