JSMF ŽILINA, FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY ŽU, GYMNÁZIUM VEĽKÁ OKRUŽNÁ ŽILINA

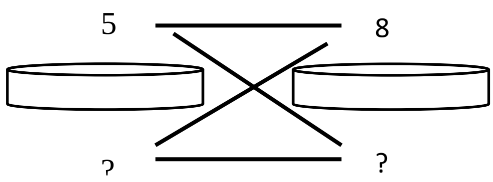
SEZAM, školský rok 2013/14, vzorové riešenia 3. letnej série

Milí riešitelia,
spolu s treťou sériou končí aj celá letná časť SEZAMu. Guliver, Jonatán a Adela vám z ostrova biológov všetkým ďakujú za celoročnú pomoc pri riešení ich problémov a prajú pekné a pohodové leto. Tých najšikovnejších z vás navyše čaká letný tábor, ktorý sa bude konať v dňoch 11. až 20. augusta vo Fačkovskom sedle. Pred tým, než sa pustíte do vypĺňania návratky, si ešte prečítajte tieto vzorové riešenia.
Nezabudnite, že všetko o SEZAMe nájdete aj na www.sezam.sk

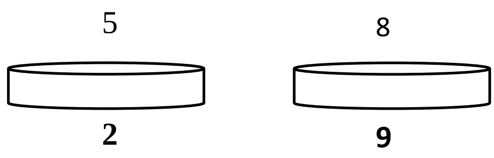
Za organizátorov vám veľa úspechov želá Martin Bachratý.

Príklad č. 1 (*opravovala Erika Novotná*)

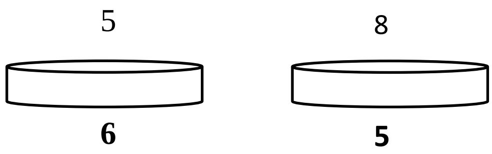
Keďže na jednom kameni bolo prilepených 5 sasaniek a na druhom 8 sasaniek, zostáva nám určiť, koľko sasaniek bolo prilepených na opačných dvoch stranách týchto kameňov. Keďže 5 + 8 = 13, musí tam byť toľko sasaniek, aby vedeli vytvoriť súčty 10, 11 a 14. Súčty pritom môžeme vytvárať iba otáčaním kameňov na rôzne strany, čo zodpovedá sčítavaniu na kríž alebo vodorovne, tak, ako je naznačené na obrázku.



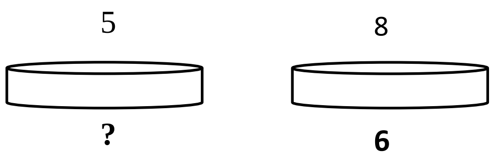
1. možnosť – Nech je na pravom kameni dole prilepených toľko sasaniek, že pri sčítaní na kríž s 5 sasankami dajú dokopy 14 sasaniek. Potom tam je 9 sasaniek. Preto na ľavom kameni dole musí byť toľko sasaniek, aby dávali chýbajúce súčty 10 a 11. To sa nám podarí, iba ak tam budú dve sasanky: 2 + 8 = 10, 2 + 9 = 11. Takto sme našli prvé možné riešenie.



2. možnosť – Nech je na pravom kameni dole prilepených toľko sasaniek, že pri sčítaní na kríž s 5 sasankami dajú dokopy 10 sasaniek. Potom tam je 5 sasaniek. Následne na ľavom kameni dole musí byť toľko, aby dávali chýbajúce súčty 11 a 14. To sa nám podarí, iba ak tam bude 6 sasaniek: 6 + 8 = 14, 6 + 5 = 11. Takto sme našli druhé riešenie.



3. možnosť – Nech je na pravom kameni dole prilepených toľko sasaniek, že pri sčítaní na kríž s 5 sasankami dajú dokopy 11 sasaniek. Musí tam byť 6 sasaniek. Potom na ľavom kameni dole musí byť toľko sasaniek, aby dávali chýbajúce súčty 10 a 14. Ak by sme tam dali hocikoľko sasaniek, tak tieto súčty nedostaneme (všimnite si, že nech vľavo dole dáme akékoľvek číslo, vždy bude súčet s 8 iba o dva väčší ako súčet so 6. Číslo 14 je ale až o 4 väčšie ako číslo 10).

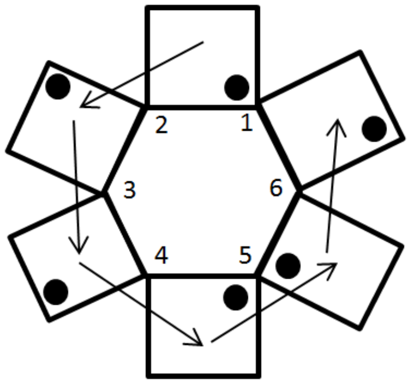


Úloha má teda dve riešenia – sasaniek mohlo byť na kameňoch nalepených toľko, ako v prvej možnosti alebo toľko, ako v druhej možnosti.

Príklad č. 2 (*opravoval Hynek Bachratý*)

***Príklad č. 3 (**opravovala Erika Novotná*)

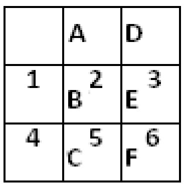
Úloha sa skladá z dvoch otázok. Na to aby sme vyriešili celú úlohou musíme odpovedať na obe.
Kde na štvorci sa bude nachádzať lienka ak po pretočení skončí na strane 6 – 1 nášho šesťuholníka? Niektorí z vás kreslili iní vystrihovali. Ja to skúsim tiež nakresliť:



Z uvedeného obrázka je jasné, že sa lienka po pretočení bude nachádzať pri pravom hornom rohu kocky z pohľadu zo strany 6 – 1.

Na druhú otázku koľko-uholník treba na to aby sa lienka opäť dostala na pôvodné miesto ako na začiatku sa treba zamyslieť nad týmto:
Lienka sa nachádza na štvorcovej kôre, teda na štvorci. Koľkokrát musím pootočiť štvorec (otáčajme štvorec napríklad okolo jeho stredu) na to aby bola lienka zasa na pôvodnom mieste? Po krátkom vyskúšaní alebo nakreslení mi dáte za pravdu, že štvorec treba pootočiť 4 – krát. Ak by sme lienkin štvorec otáčali okolo 4-uholníka dostala by sa lienka vždy na to isté miesto, kde začínala. Štvorec s lienkou by sme vtedy otočili raz dokola a 4-krát pootočili. Bohužiaľ v zadaní je napísané: „Po ako útvare s viac ako 6 vrcholmi....“. 4-uholník má však menej vrcholov ako 6 a teda nespĺňa túto podmienku.
Ako by vyzeral n-uholník na ktorom by sme lienkin štvorec otočili okolo stredu dvakrát, tak aby lienka spĺňala zadanie úlohy? Vtedy by sme museli lienkin štvorec pootočiť 2 x 4= 8 krát. Teda 8-uholník spĺňa zadanie úlohy. Avšak nie je jediný. Úlohu spĺňajú aj n-uholníky na ktorých sa lienka dokáže otočiť dokola 2, 3, 4,...... n – krát. Na jedno otočenie potrebuje 4 strany, takže vhodné útvary sú 8-uholník, 12-uholník, 16-uholník, 20-uholník a tak ďalej.

Príklad č. 4 (**opravovali Lenka Trojaková a Miro Hudec**)



V bludisku je 12 vnútorných stien z toho 9 má byť s dverami, takže bez dverí nám ostávajú 3 steny. Označme si steny v bludisku tak, ako na obrázku (tie, čo idú zo západu na východ, číslami a tie, čo idú zo severu na juh, písmenami). Z obrázku vidno, že prasiatko viem uzavrieť použitím dvoch stien: 1 a A. Tretiu stenu bez dvier môžem v tomto prípade dať na ľubovoľnú neobsadenú vnútornú stenu a tých je 10 (2 až 6 a B až F), takže to máme 10 rôznych bludísk. Podobne môžeme namiesto prasiatka uzavrieť chlieb a to stenami 6 a F, čím dostaneme ďalších 10 nepriechodných bludísk. Ak na oddelenie použijem hranicu zloženú z troch nadväzujúcich stien bez dverí, tak tá hranica môže mať tvar písmena I alebo písmena L. Ak je to I, tak sú 4 možnosti umiestnenia: 123, 456, ABC, DEF. Ak je to tvar L, tak sú tiež 4 možnosti: 12D, AB4, 65C, FE3.
To je spolu 10 + 10 + 4 + 4 = 28 bludísk, cez ktoré prasiatko nevie prejsť.

Príklad č. 5 (opravovala Ivka Hrivová)

Vieme, že každý ďalší deň bolo baktérií o polovicu viacej ako predošlí deň. Počet baktérií v pondelok si označíme ako x. Počty baktérií v nasledujúcich dňoch môžeme získať viacerými spôsobmi :

1. spôsob :

   Vždy pripočítame polovicu baktérií z predošlého dňa :

   Pondelok: x

   Utorok: $x + \frac{x}{2} = \frac{3}{2}x$

   Streda: $\frac{3}{2}x + \frac{\frac{3}{2}x}{2} = \frac{9}{4}x$

   Štvrtok: $\frac{9}{4}x + \frac{\frac{9}{4}x}{2} = \frac{27}{8}x$

   Piatok: $\frac{27}{8}x + \frac{\frac{27}{8}x}{2} = \frac{81}{16}x$

   Sobota: $\frac{81}{16}x + \frac{\frac{81}{16}x}{2} = \frac{243}{32}x$

2. spôsob :

   Na získanie počtu baktérií pre nasledujúci deň ich vynásobíme číslom 1,5, pretože sa ich počet vždy zvýši o polovicu, teda ich bude na druhý deň 150%.

   Pondelok: x

   Utorok: $x * 1{,}5 = \frac{3}{2}x$

   Streda: $\frac{3}{2}x * 1{,}5 = \frac{9}{4}x$

   Štvrtok: $\frac{9}{4}x * 1{,}5 = \frac{27}{8}x$

   Piatok: $\frac{27}{8}x * 1{,}5 = \frac{81}{16}x$

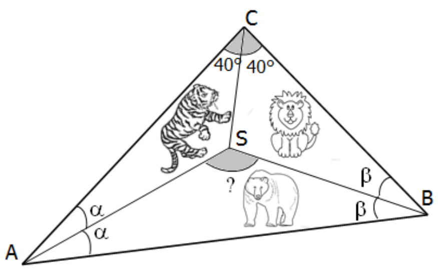
   Sobota: $\frac{81}{16}x * 1{,}5 = \frac{243}{32}x$

Teraz treba tieto počty vyčísliť. Vieme, že počet baktérií je určite celé číslo, pretože baktérie nebudeme porcovať ☺. Tiež vieme, že čísla x, $\frac{3}{2}x$, $\frac{9}{4}x$, $\frac{27}{8}x$ a $\frac{81}{16}x$ sú párne a aj to, že $\frac{243}{32}x$ je nepárne číslo. Takže keď upravíme zlomok $\frac{243}{32}x$, teda číslo x vynásobíme 243 a následne vydelíme 32, musí vzniknúť nepárne a celé číslo. Na to, aby bol tento zlomok celé číslo, musí číslo x byť násobkom 32 (aby sa skrátil menovateľ). Číslo 32 je deliteľné 2,4,8 aj 16, teda zo všetkých zlomkov budú celé čísla (môžeme si všimnúť, že všetky tieto čísla 2,4,8,16,32 sú mocninami 2). Posledná informácia, ktorú máme a ešte sme ju nevyužili je, že počet baktérií v pondelok bol menší ako 100. Teda do úvahy prichádzajú iba čísla 1 · 32 = 32, 2 · 32 = 64 a 3 · 32=96.

Teraz sa pozrime na tieto čísla. Pri úprave zlomku $\frac{243}{32}x$ sa 32 vždy vykráti a nato, aby vzniknuté číslo bolo nepárne potrebujeme, aby násobok 32 bol nepárny. Toto spĺňajú čísla 1 · 32 a 3 · 32.

Teda počet baktérií v pondelok mohol byť buď 32, alebo 96. Zodpovedajúci počet baktérií v sobotu je 243 respektíve 729.

Príklad č. 6 (opravovali Iva Jančigová a Renča Tóthová)



To najdôležitejšie, čo k vyriešeniu tohto príkladu potrebujeme je, že os uhla delí uhol na polovicu. Takže pre trojuholník ABC platí 80° + 2α + 2β = 180°. Z toho vieme, že 2α + 2β = 100°, a teda α + β = 50°. Potom pre trojuholník ABS máme rovnosť α + β + ? = 180°. A keď dosadíme 50° za α + β, tak dostávame veľkosť neznámeho uhla 130°.